Übungen zur Theoretischen Physik V, SS 2007, Blatt 5

Aufgabe 7: Lösungen der Diracschen Gleichung für freie Teilchen I: Ebene Wellen

In dieser Aufgabe diskutieren wir die Lösung der Diracschen Gleichung für freie Teilchen. Wie in anderen Wellengleichungen, lässt sich die allgemeine Lösung auch in diesem Fall als eine Überlagerung von ebenen Wellen (Wellenpakete) darstellen. Die ebenen Wellen lauten

$$\psi_+(x) = e^{-ik\cdot x}u(k), \qquad \psi_-(x) = e^{ik\cdot x}v(k),$$

wobei + und − positive bzw. negative Energielösungen bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $u(k)$ und $v(k)$ die Gleichungen $(\not{k} - m)u(k) = 0$ und $(\not{k} + m)v(k) = 0$ erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass die dazugehörigen Lösungen eines ruhenden freien Teilchens lauten:

$$\psi_+^r(x) = e^{-imt}u^r(m, \mathbf{0}), \qquad \psi_-^r(x) = e^{imt}v^r(m, \mathbf{0}),$$

wobei $r = 1, 2$ und

$$u^1(m,\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u^2(m,\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^1(m,\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^2(m,\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Die Lösungen $u^r(k)$ und $v^r(k)$ lassen sich durch eine Boost-Transformation ableiten. Aus der Aufgabe 6 lernen wir, dass solche eine Boost-Transformation die Form $S(\Lambda) = e^{-i\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}/4}$ annimmt. Wir transformieren auf ein Koordinatensystem, das sich mit einer Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ relativ zu dem der Ruhelösungen bewegt. Damit bekommen wir freie Wellenfunktionen, die sich mit einer Geschwindgkeit $+\mathbf{v}$ bewegen. Also haben wir $\omega^\mu{}_\nu = \zeta\Omega^\mu{}_\nu$, wobei $\tanh\zeta = -v$ und die Matrixelemente $\Omega^\mu{}_\nu$ den Boostgeneratoren für beliebigen Richtungen entsprechen. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\zeta}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\right),$$

wobei die Matrix $\boldsymbol{\alpha}$ lautet:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

(d) Zeigen Sie zunächst, dass

$$S(\Lambda) = \cosh\frac{\zeta}{2} - \frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{v}}{v}\sinh\frac{\zeta}{2}.$$

(e) Schliessen Sie aus der Aufgabe (d), dass

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_+}{E+m} & -\frac{p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wobei $p_\pm \equiv p_x \pm i p_y$. Daraus folgt ganz einfach die gesuchten Lösungen. Schreiben Sie sie explizit.

Hinweis: Benutzen Sie die folgenden Formel:

$$-\tanh\frac{\zeta}{2} = -\frac{\tanh\zeta}{1+\sqrt{1-\tanh^2\zeta}} = \frac{p}{E+m},$$

$$\cosh\frac{\zeta}{2} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}.$$

10 Punkte

Ausgabetermin: 21.05.2007, Abgabetermin: 29.05.2007, 12 Uhr