Übungen zur Theoretischen Physik V, SS 2007, Blatt 4

Aufgabe 6: Lorentz-Transformationen und Spinoren
Unter eine Lorentz-Transformation Λ transformiert sich ein Spinor wie:

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x), \tag{1}$$

wobei $S(\Lambda)$ eine 4×4 Matrix ist, die noch bestimmt werden muss (s.u.).

(a) Beweisen Sie durch das Verlangen von relativistische Kovarianz der Dirac-Gleichung, dass

$$S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{2}$$

folgt.

(b) Betrachten Sie die infinitesimale Lorentz-Transformation mit Matrixelemente $\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, wobei $\omega_{\mu\nu}$ infinitesimal und antisymmetrisch ist. Der entsprechende infinitesimale Ausdruck von $S(\Lambda)$ läßt sich als

$$S(\Lambda) = I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$$

schreiben, wobei die Matrizen $\sigma_{\mu\nu}$ antisymmetrische sind. Benutzen Sie Gl. (2), um den Kommutator

$$[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i(g^\mu{}_\alpha \gamma_\beta - g^\mu{}_\beta \gamma_\alpha) \tag{3}$$

herzuleiten. Zeigen Sie zunächst, dass die Matrizen

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$$

Gl. (3) erfüllen.

(c) Wir betrachten nun den sogenannten Pauli-Lubenski-Vektor

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} L^{\nu\rho} P^\sigma,$$

wobei $P^\sigma = i\partial^\sigma$. Zeigen Sie, dass aus Gl. (1)

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

folgt. Man schließt daraus, dass

$$W_\mu = -\frac{1}{4i}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\nu\rho}\partial^\sigma.$$

(d) Bestimmen Sie die Eingenwerte von $W^2 = W_\mu W^\mu$. Benutzen Sie die Dirac-Gleichung und Teilaufgabe (c), um zu zeigen, dass die Dirac-Gleichung tatsächlich ein Spin-1/2 Teilchen beschreibt.

8 Punkte

Ausgabetermin: 14.05.2007, Abgabetermin: 21.05.2007, 12 Uhr