Übungen zur Theoretischen Physik V, SS 2007, Blatt 3

Aufgabe 5: Lorentz-Gruppe
Die Basisgeneratoren $L^{\alpha\beta}$ der Lorentz-Gruppe sind im Minkowski-Raum durch die Darstellungsmatrizen

$$\left(L^{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu} = i\,\left(g^{\alpha\mu}\,g^{\beta}{}_{\nu} - g^{\beta\mu}\,g^{\alpha}{}_{\nu}\right)$$

gegeben.

(a) Beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften

$$\begin{aligned}\left(L^{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu} + \left(L^{\alpha\beta}\right)_{\nu}{}^{\mu} &= 0\,,\\ \left(L^{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu} + \left(L^{\beta\alpha}\right)^{\mu}{}_{\nu} &= 0\,,\end{aligned}$$

und berechnen Sie den Kommutator der Basisgeneratoren:

$$\left[L^{\alpha\beta}\,,\,L^{\gamma\delta}\right] = i\,\left(g^{\alpha\delta}\,L^{\beta\gamma} + g^{\beta\gamma}\,L^{\alpha\delta} - g^{\alpha\gamma}\,L^{\beta\delta} - g^{\beta\delta}\,L^{\alpha\gamma}\right)\,.$$

(b) Die Basisgeneratoren $L^{\alpha\beta}$ lassen sich in zwei Klassen einteilen:

$$\begin{aligned}M_k &= L^{0k}\,,\\ L_k &= \frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}\,L^{lm}\,,\end{aligned}$$

wobei die lateinischen Indizes die Werte 1,2,3 annehmen und die obigen griechischen Indizes die Werte 0,1,2,3 durchlaufen. Zeigen Sie, dass

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, M_j] = i\epsilon_{ijk}M_k, \quad [M_i, M_j] = -i\epsilon_{ijk}L_k.$$

(c) Sei S ein Inertialsystem. Seien S_1 und S_2 die Bezugssystemen von einem Beschleunigten System zu den entsprechden Zeitpunkte t_1 und $t_2 = t_1 + \Delta t$. Wir nehmen an, dass zu diesen Zeitpunkten die beschleunigten Systeme S_1 und S_2 die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ haben. Die sogenannte Thomas-Präzession entspricht einer Lorentz-Transformation von S_1 nach S_2, die sich durch zwei aufeinanderfolgende Lorentz-Transformationen darstellen läßt, nämlich, eine Transformation von S_1 nach S gefolgt von einer von S nach S_2. Beweisen Sie, dass diese Lorentz-Transformation von S_1 nach S_2 als ein Produkt zwischen einer Boost-Transformation und einer Rotation dargestellt werden kann.

Anleitung: Eine Boost-Transformation läßt sich als $\Lambda(\mathbf{e}, \zeta) = \exp[-i\zeta(\mathbf{M}\cdot\mathbf{e})]$ ausdrücken, wobei $\mathbf{e} = \mathbf{v}/v$ ein Einheitsvektor ist und $\tanh\zeta = v/c$. Betrachten Sie den Boost $\Lambda(\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e}, \zeta + \Delta\zeta)$ in Zusammenhang mit der Variation $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ und benutzen Sie die Baker-Campbel-Hausdorff-Formel $e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2}$.

6 Punkte

Ausgabetermin: 07.05.2007, Abgabetermin: 14.05.2007, 12 Uhr