Übungen zur Theoretischen Physik V, SS 2007, Blatt 2

Aufgabe 3: Quantisierung eines Klein-Gordon-Feldes
Die Lagrangedichte eines Klein-Gordon-Feldes lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^2].$$

Das konjungierte Feld ist durch

$$\pi(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_0 \varphi(t, \mathbf{x})]}$$

gegeben. Um dieses System zu quantisieren, muss man $\varphi(t, \mathbf{x})$ und $\pi(t, \mathbf{x})$ als Operatoren betrachten und verlangen, dass die Vertauschungsrelation

$$[\varphi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

gilt (wir benutzen ein Einheitssystem mit $\hbar = c = 1$). Der entsprechende Hamiltonoperator ist

$$H = \int d^3x \frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2 \varphi^2].$$

Wir werden die Struktur dieser Quantenfeldtheorie studieren.

(a) Wir betrachten erst eine eindimensionale Theorie. Wir führen eine Diskretisierung des Hamiltonoperators durch:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\pi_n^2 + (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 + m^2 \varphi_n^2]$$

und beachten die kommutatoren $[\varphi_n, \varphi_{n'}] = [\pi_n, \pi_{n'}] = 0$ und $[\varphi_n, \pi_{n'}] = i\delta_{nn'}$. Das System beschreibt jetzt die Schwingungsbewegung eines eindimensionalen Kristals, wo φ_n die Verschiebung des n-ten Atoms entspricht während π_n ihre konjugierte Variable bildet. Wie lauten die Fourier-Darstellungen von φ_n und π_n? Bestimmen Sie die entsprechenden Kommutatoren im Impulsraum. Was kann man über die Randbedingungen sagen?

(b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator im Impulsraum diagonalisiert ist. Bestimmen Sie die Schwigungsfrequenz ω_k in Abhängigkeit vom Impuls k. Bestimmen Sie zunächst ω_k im Grenzfall $k \to 0$.

(c) Ähnlich wie in Quantentheorie I, werden Erzeugung- und Vernichtungsoperatoren definiert durch:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}}[\omega_k \tilde{\varphi}(k) + i\tilde{\pi}(k)], \qquad a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}}[\omega_k \tilde{\varphi}^\dagger(k) + i\tilde{\pi}^\dagger(k)].$$

Zeigen Sie, dass $[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$ ist. Wie lautet der Hamiltonoperator in Termen der Operatoren a_k und $a_k^\dagger$? Bestimmen Sie die Fourier-Darstellung von φ_n und π_n in Abhängigkeit von a_k und $a_k^\dagger$.

(d) Untersuchen Sie die Eigenschaften des Grundzustandes. Zeigen Sie, dass in dieser Situation die Randbedingungen einen entscheidende Rolle spielen.

(e) Finden Sie die Fourier-Darstellung von $\dot{\varphi}_n(t)$.

10 Punkte

Aufgabe 4: Nichtrelativistische Fermionen im Gitter
Betrachten Sie den Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma} \hat{f}^{\dagger}_{i\sigma} \hat{f}_{j\sigma} - \mu \sum_{i,\sigma} \hat{n}_{i\sigma},$$

wobei $J, \mu > 0$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$, $\hat{n}_{i\sigma} \equiv \hat{f}^{\dagger}_{i\sigma} \hat{f}_{i\sigma}$ und die Operatoren $\hat{f}_{i\sigma}$ und $\hat{f}^{\dagger}_{i\sigma}$ die Antivertauschungsrelationen für Fermionen erfüllen, d.h. $\{\hat{f}_{i\alpha}, \hat{f}^{\dagger}_{j\beta}\} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}$ und $\{\hat{f}_{i\alpha}, \hat{f}_{j\beta}\} = \{\hat{f}^{\dagger}_{i\alpha}, \hat{f}^{\dagger}_{j\beta}\} = 0$, wobei $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ bezeichnet.
Betrachten Sie die sogenannte retardierte Greensche Funktion

$$G^{R}_{ij,\sigma}(t) = -i\theta(t)\langle \{\hat{f}_{i\sigma}(t), \hat{f}^{\dagger}_{j\sigma}(0)\}\rangle.$$

Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte der obigen Greenschen Funktion lautet:

$$G^{R}_{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\omega + \mu - \varepsilon(\mathbf{k}) + i\delta},$$

wobei $\varepsilon(\mathbf{k}) = -2J\sum_{a=1}^{d} \cos k_a$ und $\delta \to 0^+$ ist. Skizzieren Sie die Fermi-Oberfläche $\varepsilon(\mathbf{k}) = \mu$ für $d = 2$ und verschiedene Werten von μ. Berechnen Sie für $d = 1$ und $\mu = 0$ die Zustandsdichte

$$\rho(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{\text{B.Z.}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Im} G(\mathbf{k}, \omega),$$

wobei die Integration über die erste Brillouin-Zone ausgeführt wird.

6 Punkte

Ausgabetermin: 30.04.2007, Abgabetermin: 07.05.2007, 12 Uhr