Übungen zur Theoretischen Physik V, SS 2007, Blatt 11

Aufgabe 17: Greensche Funktion und Suprafluidität
Wir studieren weiter die Lagrange-Funktion der Aufgabe 16. Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\omega, \mathbf{p}) = M^{-1}(\omega, \mathbf{p})$, wobei $M(\omega, \mathbf{p})$ die Fouriertransformierte der Matrix ist, die in der linearisierten Feldgleichung der Aufgabe 16 aufgetreten war. Diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der Matrixelementen. Zeigen Sie, dass die Polen von $G(\omega, \mathbf{p})$ das Energiespektrum ergibt, das in der Aufgabe 16 bestimmt wurde.

4 Punkte

Aufgabe 18: Kondensat-Entleerung (auf Englisch: “ Depletion of the condensate”) in verdünnten Bose-Einstein-Kondensaten
Diese Aufgabe ist eine Fortsetzung der Aufgaben 16 und 17.
Die Teilchendichte ist durch $n = \langle|\psi(\mathbf{x}, t)|^2\rangle$ definiert während die Kondensatdichte n_0 mit $|\psi_0|^2$ identifiziert wird.

(a) Zeigen Sie, dass $n = n_0 + \langle|\delta\psi(\mathbf{x}, t)|^2\rangle$ ist.

(b) Benutzen Sie die Greensche Funktion, die in der Aufgabe 17 abgeleitet wurde, um zu zeigen, dass

$$\langle|\delta\psi(\mathbf{x}, t)|^2\rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\frac{\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + n_0 g}{2E(\mathbf{p})} - \frac{1}{2} \right],$$

wobei

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^4}{4m^2} + n_0 g \frac{\mathbf{p}^2}{m}}$$

ist.

(c) Betrachten Sie die Γ-Funktion:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\; t^{z-1} e^{-t}$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\lambda^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty d\tau\; \tau^{z-1} e^{-\lambda\tau}$$

(d) Benutzen Sie die Teilaufgabe (c), um das p-Integral der Teilaufgabe (b) auszurechnen. Das Ergebnis soll lauten:

$$\langle|\delta\psi(\mathbf{x}, t)|^2\rangle = \frac{S_d(d-2)}{16\pi^{d+1/2}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) (m n_0 g)^{d/2}.$$

Weil $\delta\psi(\mathbf{x}, t)$ als klein betrachtet wird, was eingentlich $n - n_0 \ll n$ bedeutet, ist es sinnvoll in der obigen Formel n_0 durch n zu ersetzen. Für $d = 3$ ist es Konvention $g = 4\pi a/m$ zu schreiben, wobei a die sogenannte s-Wellen-Streulänge ist. Daraus folgt für $d = 3$ die berühmte Bogoliubov-Formel für die Kondensat-Entleerung:

$$n_0 = n \left(1 - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{na^3}{\pi}}\right).$$

8 Punkte

Aufgabe 19: Exakt lösbarer anharmonischer Oszillator

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines anharmonischen Oszillators mit der Masse $m = 1$:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 x^2) + \frac{U}{8\omega^2}(p^2 + \omega^2 x^2 - \omega)(p^2 + \omega^2 x^2 - 3\omega).$$

(a) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und Eigenzustände.

(b) Berechnen Sie die Propagatoren (Greensche Funktionen) $G_x(t) = -i\langle T[x(t)x(0)]\rangle$ und $G_p(t) = -i\langle T[p(t)p(0)]\rangle$.

4 Punkte

Ausgabetermin: 02.07.2007, Abgabetermin: 11.07.2007, 12 Uhr