Übungen zur Theoretischen Physik V, SS 2007, Blatt 10

Aufgabe 15: Greensche Funktion des Klein-Gordon-Feldes
Wiederholen Sie Aufgabe 14 für die Klein-Gordon-Wirkung:

$$\mathcal{A}[\varphi, j] = \mathcal{A}[\varphi] - \int d^4x j(x)\varphi(x),$$

wobei

$$\mathcal{A}[\varphi] = \frac{1}{2}\int d^4x[(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^2].$$

10 Punkte

Aufgabe 16: Gross-Pitaevskii-Gleichung und das Energiespektrum des Helium-Superfluids
Betrachten Sie die Lagrangedichte für ein nichtrelativistisches Feld $\psi(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathcal{L} = \psi^* i\partial_t\psi - \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + \mu|\psi|^2 - \frac{g}{2}|\psi|^4,$$

wobei $g > 0$ ist.

(a) Die obige Lagrangedichte ist invariant unter der Transformation $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi'(\mathbf{x}, t)e^{i\theta(\mathbf{x},t)}$ mit $\theta(\mathbf{x}, t) = \text{const.}$ Zeigen Sie, dass die Wirkung auch invariant ist, wenn man $\theta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - p^2t/(2m)$ und die Transformation $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{p}t/m$, $t' = t$ mit einem konstanten $\mathbf{p}$ nutzt.

(b) Leiten Sie durch Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichung die Feldgleichung ab. Sie ist die sogenannte Gross-Pitaevskii-Gleichung.

(c) Bestimmen Sie die uniforme Lösung ψ_0 der Feldgleichung für $\mu > 0$. Skizzieren Sie die potentielle Energie für $\mu > 0$ und $\mu < 0$.

(d) Setzen Sie $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_0 + \delta\psi(\mathbf{x}, t)$, wo ψ_0 aus Teilaufgabe (c) zu entnehmen ist, in die Feldgleichung ein und linearisieren Sie sie unter der Annahme, dass $\delta\psi^2$ vernachlässigbar ist. Finden Sie das Energiespektrum in dieser Nährung. Das Ergebnis entspricht dem Energiespektrum für ein Helium-Superfluid. Wie verhält es sich für $k \to 0$?

(e) Wie lautet die Impulsdichte $\pi(\mathbf{x}, t)$? Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\{\psi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)\}$.

(f) Ersetzen Sie $\psi(\mathbf{x}, t)$ and $\pi(\mathbf{x}', t)$ durch die Operatoren $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ und $\hat{\pi}(\mathbf{x}', t)$ und die Poisson-Klammer der Teilaufgabe (e) durch den Kommutator $-i[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)]$. Benutzen Sie die Teilaufgabe (e) und das Korrespondenzprinzip, um den Kommutator $[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}', t)]$ zu bestimmen. Was kriegt man im Impulsraum?

(g) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{\psi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}]$, wobei

$$\hat{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}\hat{\psi}^\dagger \cdot \boldsymbol{\nabla}\hat{\psi} - \mu\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} + \frac{g}{2}(\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi})^2\right]$$

ist. Bestimmen Sie die Feldgleichung für $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ durch Verwendung der Heisenberg-Gleichung. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus der Teilaufgabe (b).

14 Punkte

Ausgabetermin: 25.06.2007, Abgabetermin: 04.06.2007, 12 Uhr