Übungen zur Theoretischen Physik V, SS-2007, Blatt 1

Aufgabe 1: Kommutator-Rechnung für Bosonen
Gegeben seien die Kommutatoren $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$, $[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0$ für Bosonen.
Berechnen Sie: $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j]$, $[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j]$, $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k^\dagger]$ und $[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j \hat{a}_k]$.

4 Punkte

Aufgabe 2: Konstruktion des Drehimpulses aus den Operatoren eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators
Seien $\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^\dagger$ $(i = 1, 2)$ die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren eines isotropen zweidimensionalen harmonischen Oszillators:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \qquad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}.$$

Man setze

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \qquad \hat{J}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \qquad \hat{J}_3 = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2),$$
$$\hat{K} = \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2).$$

$\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$, $\hat{J}_3$ können als die kartesischen Komponenten eines Vektoroperators $\hat{\mathbf{J}}$ aufgefaßt werden.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \hat{a}_\alpha^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} \hat{a}_\beta,$$
wobei $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ und
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
die sogenannten Pauli-Matrizen sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Komponenenten von $\mathbf{J}$ den Drehimpulskommutatorrelation $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$ erfüllen und dass gilt:
$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{K}(\hat{K} + 1)$$
und somit auch $[\hat{K}, \hat{\mathbf{J}}^2] = 0$.

(c) $\hat{\mathbf{J}}$ sei jetzt der Drehimpuls des Systems und $j(j+1)$ der Eigenwert von $\hat{\mathbf{J}}^2$ und m von $\hat{J}_3$. Zeigen Sie dass j alle nichtnegativen *ganzen* oder *halbzahligen* Werte annehmen kann. Zeigen Sie, dass die Vektoren $|j, m\rangle = [(j+m)!(j-m)!]^{-1/2} (\hat{a}_1^\dagger)^{j+m} (\hat{a}_2^\dagger)^{j-m} |0\rangle$ die Basis einer $\{\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_3\}$-Standarddarstellung bilden.

6 Punkte

Ausgabetermin: 23.04.2007, Abgabetermin: 30.04.2007, 12 Uhr