Heiko Dumlich, Max Hoffmann 17. Dezember 2006

9 Übungsblatt Theoretische Physik IV

9.1 (Separation der Schwerpunktbewegung)

Der Hamiltonoperator eines Systems aus zwei Teilchen, die durch ein entfernungsabhängiges Potential wechselwirken, ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + V\left(|\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2|\right)$$

und die Vertauschungsrelationen lauten:

$$[\hat{r}_{\mu,i}, \hat{r}_{\nu,j}] = 0, \quad [\hat{p}_{\mu,i}, \hat{p}_{\nu,j}] = 0, \ \text{ und } \ [\hat{r}_{\mu,i}, \hat{p}_{\nu,j}] = i\hbar\delta_{i,j}\delta_{\mu,\nu}.$$

Dabei beziehen sich die Indizes $\mu, \nu \in \{1, 2\}$ auf Teilchen 1 bzw. 2 und die Indizes $i, j \in \{1, 2, 3\}$ auf die drei Raumrichtungen. Die Schwerpunkt- und Relativkoordinate sind definiert durch :

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{m_1\hat{\mathbf{r}}_1 + m_2\hat{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2$$

und die dazugehörigen Impulse sind:

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2, \quad bzw. \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{m_2\hat{\mathbf{p}}_1 - m_1\hat{\mathbf{p}}_2}{(m_1 + m_2)}.$$

a)

Es ist zu zeigen, dass die neuen Operatoren die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j} \quad \text{und} \quad \left[\hat{R}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{i,j},$$

erfüllen und dass alle anderen Kommutatoren der neuen Variablen verschwinden.
Wir betrachten $\hat{r}_i = \hat{r}_{i,1} - \hat{r}_{i,2}$ und $\hat{p}_j = \frac{m_2\hat{p}_{j,1} - m_1\hat{p}_{j,2}}{m_1+m_2}$, einsetzen liefert:

$$[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = \left[\hat{r}_{i,1} - \hat{r}_{i,2}, \frac{m_2\hat{p}_{j,1} - m_1\hat{p}_{j,2}}{m_1 + m_2}\right] = \left[\hat{r}_{i,1}, \frac{m_2\hat{p}_{j,1} - m_1\hat{p}_{j,2}}{m_1 + m_2}\right] + \left[-\hat{r}_{i,2}, \frac{m_2\hat{p}_{j,1} - m_1\hat{p}_{j,2}}{m_1 + m_2}\right],$$

dies lässt sich weiter aufspalten zu:

$$[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = \left[\hat{r}_{i,1}, \frac{m_2\hat{p}_{j,1}}{m_1 + m_2}\right] + \left[\hat{r}_{i,1}, -\frac{m_1\hat{p}_{j,2}}{m_1 + m_2}\right] + \left[-\hat{r}_{i,2}, \frac{m_2\hat{p}_{j,1}}{m_1 + m_2}\right] + \left[-\hat{r}_{i,2}, -\frac{m_1\hat{p}_{j,2}}{m_1 + m_2}\right],$$

Wir können also die neuen Kommutatoren in den alten darstellen, wobei die alten bereits bekannt sind:

$$[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left\{[\hat{r}_{i,1}, \hat{p}_{j,1}] - [\hat{r}_{i,2}, \hat{p}_{j,1}]\right\} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{[\hat{r}_{i,1}, \hat{p}_{j,2}] - [\hat{r}_{i,2}, \hat{p}_{j,2}]\right\},$$

diese können wir also explizit lösen, indem wir $[r_{\mu,i}, p_{\nu,j}] = i\hbar\delta_{i,j}\delta_{\mu,\nu}$ benutzen:

$$[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left\{i\hbar\delta_{i,j} - 0\right\} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{0 - i\hbar\delta_{i,j}\right\} = i\hbar\delta_{i,j}\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} = i\hbar\delta_{i,j}.$$

Wir können dasselbe nun für den zweiten Kommutator zeigen:

$$\left[\hat{R}_i, \hat{P}_j\right] = \left[\frac{m_1\hat{r}_{i,1} + m_2\hat{r}_{i,2}}{m_1+m_2}, \hat{p}_{j,1} + \hat{p}_{j,2}\right],$$

auch in diesem Fall können wir wieder in die alten Kommutatoren umschreiben:

$$\left[\hat{R}_i, \hat{P}_j\right] = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{[\hat{r}_{i,1}, \hat{p}_{j,1}] + [\hat{r}_{i,1}, \hat{p}_{j,2}]\right\} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left\{[\hat{r}_{i,2}, \hat{p}_{j,1}] + [\hat{r}_{i,2}, \hat{p}_{j,2}]\right\},$$

wieder können wir $[\hat{r}_{\mu,i}, \hat{p}_{\nu,j}] = i\hbar\delta_{i,j}\delta_{\mu,\nu}$ ausnutzen:

$$\left[\hat{R}_i, \hat{P}_j\right] = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left\{i\hbar\delta_{i,j} + 0\right\} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left\{0 + i\hbar\delta_{i,j}\right\} = i\hbar\delta_{i,j}\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} = i\hbar\delta_{i,j}.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass alle weitern Kommutatoren verschwinden. D.h. wir müssen zeigen, dass gilt:

$$\begin{aligned}
[\hat{r}_i, \hat{r}_j] &= 0 = [\hat{r}_{i,1} - \hat{r}_{i,2}, \hat{r}_{j,1} - \hat{r}_{j,2}] \\
[\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0 = \left[\frac{m_2\hat{p}_{i,1} - m_1\hat{p}_{i,2}}{m_1+m_2}, \frac{m_2\hat{p}_{j,1} - m_1\hat{p}_{j,2}}{m_1+m_2}\right] \\
\left[\hat{R}_i, \hat{R}_j\right] &= 0 = \left[\frac{m_1\hat{r}_{i,1} + m_2\hat{r}_{i,2}}{m_1+m_2}, \frac{m_1\hat{r}_{j,1} + m_2\hat{r}_{j,2}}{m_1+m_2}\right] \\
\left[\hat{P}_i, \hat{P}_j\right] &= 0 = [\hat{p}_{i,1} + \hat{p}_{i,2}, \hat{p}_{j,1} + \hat{p}_{j,2}] \\
\left[\hat{r}_i, \hat{R}_j\right] &= 0 = \left[\hat{r}_{i,1} - \hat{r}_{i,2}, \frac{m_1\hat{r}_{j,1} + m_2\hat{r}_{j,2}}{m_1+m_2}\right] \\
\left[\hat{p}_i, \hat{P}_j\right] &= 0 = \left[\frac{m_2\hat{p}_{i,1} - m_1\hat{p}_{i,2}}{m_1+m_2}, \hat{p}_{j,1} + \hat{p}_{j,2}\right]
\end{aligned}$$

In diesen Fällen können wir $[\hat{r}_{\mu,i}, \hat{r}_{\nu,j}] = 0$ bzw. $[\hat{p}_{\mu,i}, \hat{p}_{\nu,j}] = 0$, ausnutzen, da in diesen Fällen alle Kommutatoren die gleiche Operatorart, entweder $\hat{r}$ oder $\hat{p}$ beinhalten. Für die folgenden treten Mischterme aus $\hat{r}$ und $\hat{p}$ auf:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{r}_i, \hat{P}_j\right] &= [\hat{r}_{i,1} - \hat{r}_{i,2}, \hat{p}_{j,1} + \hat{p}_{j,2}] \\
\left[\hat{p}_i, \hat{R}_j\right] &= \left[\frac{m_2\hat{p}_{i,1} - m_1\hat{p}_{i,2}}{m_1+m_2}, \frac{m_1\hat{r}_{j,1} + m_2\hat{r}_{j,2}}{m_1+m_2}\right]
\end{aligned}$$

Für diese beiden Kommutatoren können wir wieder explizit rechnen und $[\hat{r}_{\mu,i}, \hat{p}_{\nu,j}] = i\hbar\delta_{i,j}\delta_{\mu,\nu}$ ausnutzen:

$$\left[\hat{r}_i, \hat{P}_j\right] = [\hat{r}_{i,1}, \hat{p}_{j,1}] + [\hat{r}_{i,1}, \hat{p}_{j,2}] - [\hat{r}_{i,2}, \hat{p}_{j,1}] - [\hat{r}_{i,2}, \hat{p}_{j,2}] = i\hbar\delta_{i,j} + 0 - 0 - i\hbar\delta_{i,j} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{p}_i, \hat{R}_j\right] &= \frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1 m_2 [\hat{p}_{i,1}, \hat{r}_{j,1}] + m_2^2 [\hat{p}_{i,1}, \hat{r}_{j,2}] - m_1^2 [\hat{p}_{i,2}, \hat{r}_{j,1}] - m_1 m_2 [\hat{p}_{i,2}, \hat{r}_{j,2}]\right\} \\
&= \frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1 m_2 (-i\hbar\delta_{i,j}) + m_2^2 \cdot 0 - m_1^2 \cdot 0 - m_1 m_2 (-i\hbar\delta_{i,j})\right\} \\
&= -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\{i\hbar\delta_{i,j} - i\hbar\delta_{i,j}\} = 0.
\end{aligned}$$

Somit müssen also alle Kommutatoren ausser $[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j}$ und $\left[\hat{R}_i, \hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{i,j}$ verschwinden.

b)

Es ist zu zeigen, dass der Hamilton-Operator in den neuen Koordinaten durch:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(|\hat{\mathbf{r}}|),$$

beschrieben wird. Hierbei ist $M = m_1 + m_2$ und $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$. Wir gehen vom alten Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + V(|\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2|),$$

aus, wobei mit $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2$, direkt das Potential des neuen Hamiltonoperators gefunden werden kann, also bleibt nur noch die Identität der impulsabhängigen Terme zu zeigen. Es gilt:

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} = \frac{m_2\hat{\mathbf{p}}_1^2 + m_1\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_1m_2} = \frac{m_2\hat{\mathbf{p}}_1^2 + m_1\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_1m_2} \cdot \frac{(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)} = \frac{\left(m_2\hat{\mathbf{p}}_1^2 + m_1\hat{\mathbf{p}}_2^2\right)(m_1+m_2)}{2m_1m_2(m_1+m_2)},$$

Wir können dies ausrechnen und erhalten:

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} = \frac{m_1m_2\hat{\mathbf{p}}_1^2 + m_1^2\hat{\mathbf{p}}_2^2 + m_2^2\hat{\mathbf{p}}_1^2 + m_2m_1\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_1m_2(m_1+m_2)} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2 + \hat{\mathbf{p}}_2^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{m_2^2\hat{\mathbf{p}}_1^2 + m_1^2\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_1m_2(m_1+m_2)},$$

wir können beim ersten Term eine 0 addieren:

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2 + \hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2 + \hat{\mathbf{p}}_2\hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2^2 - (\hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2 + \hat{\mathbf{p}}_2\hat{\mathbf{p}}_1)}{2(m_1+m_2)} + \frac{m_2^2\hat{\mathbf{p}}_1^2 + m_1^2\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_1m_2(m_1+m_2)},$$

jetzt erkennen wir auch bereits $\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2 + \hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2 + \hat{\mathbf{p}}_2\hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2^2}{2(m_1+m_2)}$, was wir einsetzen können:

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2}=\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M}+\frac{m_2^2\hat{\mathbf{p}}_1^2+m_1^2\hat{\mathbf{p}}_2^2-m_1m_2\left(\hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2+\hat{\mathbf{p}}_2\hat{\mathbf{p}}_1\right)}{2m_1m_2\left(m_1+m_2\right)},$$

ein weiteres Mal können wir geschickt mit einer 1 multiplizieren:

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2}=\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M}+\frac{m_2^2\hat{\mathbf{p}}_1^2+m_1^2\hat{\mathbf{p}}_2^2-m_1m_2\left(\hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2+\hat{\mathbf{p}}_2\hat{\mathbf{p}}_1\right)}{2m_1m_2\left(m_1+m_2\right)}\cdot\frac{\left(m_1+m_2\right)}{\left(m_1+m_2\right)},$$

wir können nun auch $\hat{\mathbf{p}}^2$ erkennen, dies ist gegeben mit:

$$\hat{\mathbf{p}}^2=\left(\frac{m_2\hat{\mathbf{p}}_1-m_1\hat{\mathbf{p}}_2}{\left(m_1+m_2\right)}\right)^2=\frac{m_2^2\hat{\mathbf{p}}_1^2-m_1m_2\hat{\mathbf{p}}_2\hat{\mathbf{p}}_1-m_1m_2\hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2+m_1^2\hat{\mathbf{p}}_2^2}{\left(m_1+m_2\right)^2},$$

setzen wir dies ein, ergibt sich:

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2}=\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M}+\hat{\mathbf{p}}^2\cdot\frac{\left(m_1+m_2\right)}{2m_1m_2},$$

und mit $\frac{(m_1+m_2)}{2m_1m_2}=\frac{1}{m}$, haben wir auch das letzte Puzzlestück gefunden, somit gilt also:

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2}=\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M}+\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{m},$$

fügen wir dies in den Hamilton-Operator ein, gilt also insgesamt in den neuen Koordinaten:

$$\hat{H}=\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M}+\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}+V\left(|\hat{\mathbf{r}}|\right).$$

c)

Die stationäre Schrödingergleichung zum neuen Hamiltonian kann durch den Separationsansatz $\Psi\left(\mathbf{R},\mathbf{r}\right)=\Phi\left(\mathbf{R}\right)\varphi\left(\mathbf{r}\right)$ gelöst werden. Es ist zu zeigen, welche Gleichungen von $\Phi\left(\mathbf{R}\right)$ und $\varphi\left(\mathbf{r}\right)$ erfüllt werden müssen.

Wir betrachten also die Schrödingergleichung:

$$\left[\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M}+\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}+V\left(|\hat{\mathbf{r}}|\right)\right]\Psi\left(\mathbf{R},\mathbf{r}\right)=E\Psi\left(\mathbf{R},\mathbf{r}\right),$$

wobei wir den Separationsansatz $\Psi\left(\mathbf{R},\mathbf{r}\right)=\Phi\left(\mathbf{R}\right)\varphi\left(\mathbf{r}\right)$ nutzen:

$$\left[\frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M}+\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}+V\left(|\hat{\mathbf{r}}|\right)\right]\Phi\left(\mathbf{R}\right)\varphi\left(\mathbf{r}\right)=E\Phi\left(\mathbf{R}\right)\varphi\left(\mathbf{r}\right),$$

Wir können in die Ortsdarstellung gehen, somit folgt:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}^2 &= -\hbar^2\nabla^2_{\mathbf{R}}\\ \hat{\mathbf{p}}^2 &= -\hbar^2\nabla^2_{\mathbf{r}},\end{aligned}$$

wir können nun die "alten" Definitionen betrachten:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}} &= \hat{\mathbf{p}}_1+\hat{\mathbf{p}}_2=\frac{\hbar}{i}\left(\nabla_{\mathbf{r}_1}+\nabla_{\mathbf{r}_2}\right)\\ \hat{\mathbf{p}} &= \frac{m_2\hat{\mathbf{p}}_1-m_1\hat{\mathbf{p}}_2}{(m_1+m_2)}=\frac{\hbar}{i\,(m_1+m_2)}\left(m_2\nabla_{\mathbf{r}_1}-m_1\nabla_{\mathbf{r}_2}\right),\end{aligned}$$

wobei die Quadrate:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}^2 &= \left(\hat{\mathbf{p}}_1+\hat{\mathbf{p}}_2\right)^2=\left(\hat{\mathbf{p}}_1^2+2\hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2+\hat{\mathbf{p}}_2^2\right)=-\hbar^2\left(\nabla^2_{\mathbf{r}_1}+2\nabla_{\mathbf{r}_1}\nabla_{\mathbf{r}_2}+\nabla^2_{\mathbf{r}_2}\right)\\ \hat{\mathbf{p}}^2 &= \left(\frac{m_2\hat{\mathbf{p}}_1-m_1\hat{\mathbf{p}}_2}{(m_1+m_2)}\right)^2=\frac{\left(m_2\hat{\mathbf{p}}_1\right)^2-2m_1m_2\hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2+\left(m_1\hat{\mathbf{p}}_2\right)^2}{(m_1+m_2)^2}=\\ &= \frac{-\hbar^2}{(m_1+m_2)^2}\left(\left(m_2\nabla_{\mathbf{r}_1}\right)^2-2m_1m_2\nabla_{\mathbf{r}_1}\nabla_{\mathbf{r}_2}+\left(m_1\nabla_{\mathbf{r}_2}\right)^2\right)\end{aligned}$$

liefern. Die Schrödingergleichung kann geschrieben werden als:

$$\varphi(\mathbf{r})\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla^2_{\mathbf{R}}\Phi(\mathbf{R})-\Phi(\mathbf{R})\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r})+V(|\hat{\mathbf{r}}|)\,\Phi(\mathbf{R})\,\varphi(\mathbf{r})=E\Phi(\mathbf{R})\,\varphi(\mathbf{r}).$$

Dies resultiert daraus, das die Anwendung von den Operatoren auf die Funktionen zum Teil Nullen liefern. Wir zeigen im folgenden, in welchen Fällen dies geschieht:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}^2\varphi(\mathbf{r}) &= -\hbar^2\left(\nabla^2_{\mathbf{r}_1}+2\nabla_{\mathbf{r}_1}\nabla_{\mathbf{r}_2}+\nabla^2_{\mathbf{r}_2}\right)\varphi(\mathbf{r})\\ &= -\hbar^2\left(\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2}{\partial r_{1,i}^2}\varphi(\mathbf{r})+2\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial r_{1,i}}\frac{\partial}{\partial r_{2,i}}\varphi(\mathbf{r})+\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2}{\partial r_{2,i}^2}\varphi(\mathbf{r})\right)\\ &= -\hbar^2\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial}{\partial r_{1,i}}\left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{\partial r_{1,i}}\right]+2\frac{\partial}{\partial r_{2,i}}\left[\varphi'(\mathbf{r})\frac{\partial(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{\partial r_{1,i}}\right]+\frac{\partial}{\partial r_{2,i}}\left[\varphi'(\mathbf{r})\frac{\partial(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{\partial r_{2,i}}\right]\right)\\ &= -\hbar^2\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial}{\partial r_{1,i}}\left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\vec{e}_i\right]+2\frac{\partial}{\partial r_{2,i}}\left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\vec{e}_i\right]+\frac{\partial}{\partial r_{2,i}}\left[\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}(-\vec{e}_i)\right]\right)\\ &= -\hbar^2\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial^2\mathbf{r}}\frac{\partial(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{\partial r_{1,i}}\vec{e}_i+2\left[\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}^2}\frac{\partial(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{\partial r_{2,i}}\vec{e}_i\right]+\left[\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}^2}\frac{\partial(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{\partial r_{2,i}}(-\vec{e}_i)\right]\right)\\ &= -\hbar^2\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial^2\mathbf{r}}\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i+2\left[\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}^2}(-\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_i\right]+\left[\frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}^2}(-\vec{e}_i)\cdot(-\vec{e}_i)\right]\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\hbar^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial^2 \mathbf{r}} \left\{ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i - 2\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i + \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i \right\} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Somit fällt dieser Term schonmal weg. Als nächstes zeigen wir, dass auch $\hat{\mathbf{p}}^2 \Phi(\mathbf{R})$ verschwindet:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{p}}^2 \Phi(\mathbf{R}) &= \frac{-\hbar^2}{(m_1+m_2)^2} \left((m_2 \nabla_{\mathbf{r}_1})^2 - 2m_1 m_2 \nabla_{\mathbf{r}_1} \nabla_{\mathbf{r}_2} + (m_1 \nabla_{\mathbf{r}_2})^2 \right) \Phi(\mathbf{R}) \\
&= \frac{-\hbar^2}{(m_1+m_2)^2} \sum_{i=1}^{3} \left(m_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r_{1,i}^2} \Phi(\mathbf{R}) - 2m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial r_{1,i}} \frac{\partial}{\partial r_{2,i}} \Phi(\mathbf{R}) + m_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r_{2,i}^2} \Phi(\mathbf{R}) \right) \\
&= \frac{-\hbar^2}{(m_1+m_2)^2} \sum_{i=1}^{3} \left(m_2^2 \frac{\partial}{\partial r_{1,i}} \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_{1,i}} \right] - 2m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial r_{2,i}} \left[\Phi'(\mathbf{R}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_{1,i}} \right] \right) \\
&+ \frac{(-\hbar^2)}{(m_1+m_2)^2} \sum_{i=1}^{3} m_1^2 \frac{\partial}{\partial r_{2,i}} \left[\Phi'(\mathbf{R}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_{2,i}} \right] \\
&= \frac{-\hbar^2}{(m_1+m_2)} \sum_{i=1}^{3} \left(m_2^2 \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}^2} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_{1,i}} m_1 \vec{e}_i - 2m_1 m_2 \Phi''(\mathbf{R}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_{2,i}} m_1 \vec{e}_i + m_1^2 \Phi''(\mathbf{R}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_{2,i}} m_2 \vec{e}_i \right) \\
&= \frac{-\hbar^2}{(m_1+m_2)} \sum_{i=1}^{3} \left(m_1^2 m_2^2 \Phi''(\mathbf{R}) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i - 2m_1^2 m_2^2 \Phi''(\mathbf{R}) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i + m_1^2 m_2^2 \Phi''(\mathbf{R}) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Die Anwendung auf die jeweils andere Funktion liefert:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{P}}^2 \Phi(\mathbf{R}) &= -\hbar^2 \left(\nabla_{\mathbf{r}_1}^2 + 2\nabla_{\mathbf{r}_1} \nabla_{\mathbf{r}_2} + \nabla_{\mathbf{r}_2}^2 \right) \Phi(\mathbf{R}) \\
&= -\hbar^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial r_{1,i}} \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_{1,i}} \right] + 2 \frac{\partial}{\partial r_{2,i}} \left[\Phi'(\mathbf{R}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_{1,i}} \right] + \frac{\partial}{\partial r_{2,i}} \left[\Phi'(\mathbf{R}) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r_{2,i}} \right] \right) \\
&= -\hbar^2 \left(\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \Phi''(\mathbf{R}) + \frac{2m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} \Phi''(\mathbf{R}) + \Phi''(\mathbf{R}) \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} \right) \\
&= -\hbar^2 \Phi''(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}}^2 \Phi(\mathbf{R}).
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{p}}^2 \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{-\hbar^2}{(m_1+m_2)^2} \left((m_2 \nabla_{\mathbf{r}_1})^2 - 2m_1 m_2 \nabla_{\mathbf{r}_1} \nabla_{\mathbf{r}_2} + (m_1 \nabla_{\mathbf{r}_2})^2 \right) \varphi(\mathbf{r}) \\
&= \frac{-\hbar^2}{(m_1+m_2)^2} \sum_{i=1}^{3} \left(m_2^2 \frac{\partial^2}{\partial r_{1,i}^2} \varphi(\mathbf{r}) - 2m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial r_{1,i}} \frac{\partial}{\partial r_{2,i}} \varphi(\mathbf{r}) + m_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r_{2,i}^2} \varphi(\mathbf{r}) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\hbar^2}{(m_1+m_2)^2}\left(m_2^2\varphi''(\mathbf{r}) + 2m_1m_2\varphi''(\mathbf{r}) + m_1^2\varphi''(\mathbf{r})\right) \\
&= -\hbar^2\varphi''(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}}^2\varphi(\mathbf{r}).
\end{aligned}
$$

Das zeigt uns also, dass die Gleichung tatsächlich als:

$$
\varphi(\mathbf{r})\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla_{\mathbf{R}}^2\Phi(\mathbf{R}) - \Phi(\mathbf{R})\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{r}}^2\varphi(\mathbf{r}) + V(|\hat{\mathbf{r}}|)\Phi(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{r}) = E\Phi(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{r}),
$$

geschrieben werden kann.Wir teilen durch $\Phi(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{r})$, womit wir:

$$
\frac{1}{\Phi(\mathbf{R})}\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla_{\mathbf{R}}^2\Phi(\mathbf{R}) - \frac{1}{\varphi(\mathbf{r})}\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{r}}^2\varphi(\mathbf{r}) + V(|\hat{\mathbf{r}}|) = E.
$$

erhalten. Wir können die Terme nun identifizieren, wobei der erste Term die Schwerpunktbewegung beschreibt, während der zweite Term die relative Bewegung der Teilchen zueinander beschreibt. Diese beiden müssen jeweils konstant sein, da sie zusammen E liefern und in beiden Termen eine andere Abhängigkeit existiert $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{r}$. Somit können wir also die zwei Gleichungen schreiben:

$$
\begin{aligned}
\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla_{\mathbf{R}}^2\Phi(\mathbf{R}) &= E_{\mathbf{R}}\Phi(\mathbf{R}) \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{r}}^2\varphi(\mathbf{r}) + V(|\hat{\mathbf{r}}|)\varphi(\mathbf{r}) &= E_{\mathbf{r}}\varphi(\mathbf{r}).
\end{aligned}
$$

Hierbei beschreibt die erste die Schwerpunktsbewegung und die zweite die Relativbewegung. Es ist nun noch die Lösung von $\Phi(\mathbf{R})$ und der zugehörige Eigenwert zu bestimmen, wir wählen den Standartansatz:

$$
\Phi(\mathbf{R}) = A\exp\left(i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right) + B\exp\left(-i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right),
$$

einsetzen in die Schrödingergleichung liefert:

$$
\begin{aligned}
\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla_{\mathbf{R}}^2\left[A\exp\left(i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right) + B\exp\left(-i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right)\right] &= E_{\mathbf{R}}A\exp\left(i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right) + B\exp\left(-i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right) \\
\frac{-\hbar^2}{2M}\left[-k^2A\exp\left(i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right) - k^2B\exp\left(-i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right)\right] &= E_{\mathbf{R}}A\exp\left(i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right) + B\exp\left(-i\vec{k}\cdot\mathbf{R}\right) \\
\frac{\hbar^2k^2}{2M} &= E_{\mathbf{R}}.
\end{aligned}
$$

Wir besitzen also eine ebene Welle, wobei die Energie durch $E_{\mathbf{R}} = \frac{\hbar^2k^2}{2M}$, gegeben ist, der Impuls ist also mit $\mathbf{P} = \hbar\vec{k}$ gegeben und somit ist $E_{\mathbf{R}}$ die kinetische Energie. Unser gesamtes System bestehend aus zwei Elektronen, bzw. genauer der Schwerpunkt, breitet sich also als Welle aus, während wir eine zweite Schrödingergleichung besitzen, die die relative Bewegung dieser beiden Elektronen beschreibt.

9.2 (Harmonischer Oszillator in drei Dimensionen)

Wir betrachten einen dreidimensionalen, harmonischen Osziallator. Für dessen Hamiltonoperator gilt:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{\mathbf{r}}^2.$$

a)

Es ist das Energiespektrum dieses Systems zu bestimmen. Es gilt:

$$\langle n|\hat{H}|n\rangle = \langle n|E|n\rangle,$$

Einsetzen liefert:

$$\langle n|\hat{H}|n\rangle = \langle n|\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\mathbf{r}}^2|n\rangle = \frac{1}{2m}\langle n|\hat{\mathbf{p}}^2|n\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\langle n|\hat{\mathbf{r}}^2|n\rangle.$$

Wir können die kanonischen Vertauschungsrelationen ausnutzen $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ und uns wie im Falle des ein-dimensionalen harmonischen Oszillators Hilfsoperatoren definieren:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_i &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}_i + \frac{i\hat{p}_i}{m\omega}\right) \\
\hat{a}_i^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}_i - \frac{i\hat{p}_i}{m\omega}\right)
\end{aligned}$$

Wobei für den Kommutator dieser beiden gilt:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] &= \hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_i \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{\left(\hat{x}_i + \frac{i\hat{p}_i}{m\omega}\right)\left(\hat{x}_j - \frac{i\hat{p}_j}{m\omega}\right) - \left(\hat{x}_j - \frac{i\hat{p}_j}{m\omega}\right)\left(\hat{x}_i + \frac{i\hat{p}_i}{m\omega}\right)\right\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{\left(\hat{x}_i\hat{x}_j - \hat{x}_i\frac{i\hat{p}_j}{m\omega} + \frac{i\hat{p}_i}{m\omega}\hat{x}_j + \frac{\hat{p}_i\hat{p}_j}{(m\omega)^2}\right) - \left(\hat{x}_j\hat{x}_i + \hat{x}_j\frac{i\hat{p}_i}{m\omega} - \frac{i\hat{p}_j}{m\omega}\hat{x}_i + \frac{\hat{p}_j\hat{p}_i}{(m\omega)^2}\right)\right\},
\end{aligned}$$

wir können die Kommutatorrelationen $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$ und $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ ausnutzen und umstellen:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{\left(\hat{x}_i\hat{x}_j - \hat{x}_i\frac{i\hat{p}_j}{m\omega} + \frac{i\hat{p}_i}{m\omega}\hat{x}_j + \frac{\hat{p}_i\hat{p}_j}{(m\omega)^2}\right) - \left(\hat{x}_i\hat{x}_j + \hat{x}_j\frac{i\hat{p}_i}{m\omega} - \frac{i\hat{p}_j}{m\omega}\hat{x}_i + \frac{\hat{p}_i\hat{p}_j}{(m\omega)^2}\right)\right\} \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left\{\left(-\hat{x}_i\frac{i\hat{p}_j}{m\omega} + \frac{i\hat{p}_i}{m\omega}\hat{x}_j\right) - \left(\hat{x}_j\frac{i\hat{p}_i}{m\omega} - \frac{i\hat{p}_j}{m\omega}\hat{x}_i\right)\right\} \\
&= \frac{i}{2\hbar}\left\{-\hat{x}_i\hat{p}_j + \hat{p}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{p}_i + \hat{p}_j\hat{x}_i\right\} = \frac{i}{2\hbar}\left\{(\hat{p}_j\hat{x}_i - \hat{x}_i\hat{p}_j) + (\hat{p}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{p}_i)\right\} \\
&= \frac{i}{2\hbar}\left\{[\hat{p}_j, \hat{x}_i] + [\hat{p}_i, \hat{x}_j]\right\} = \frac{i}{2\hbar}\left\{-i\hbar\delta_{ji} - i\hbar\delta_{ij}\right\} \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Wir können unsere Operatoren aus dem Hamiltonian nun durch unsere neu definierten Operatoren ausdrücken:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger\right)\\ \hat{p}_i &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i\right).\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} &= \sum_{i=1}^{3}\hat{x}_i^2\\ \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{p}} &= \sum_{i=1}^{3}\hat{p}_i^2.\end{aligned}$$

Wir können in den Erwartungswert für den Hamiltonoperator einsetzen:

$$\langle n|\hat{H}|n\rangle = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\langle n_i|\hat{p}_i^2|n_i\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2\sum_{i=1}^{3}\langle n_i|\hat{x}_i^2|n_i\rangle$$

Es gilt für die Operatoren:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger\right)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}_i^2 + \hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i^{\dagger 2}\right)\\ \hat{p}_i^2 &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i\right)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}\left(-\hat{a}_i^{\dagger 2} + \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^2\right)\end{aligned}$$

Einsetzen in den Erwartungswert für den Hamiltonoperator liefert:

$$\langle n|\hat{H}|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\sum_{i=1}^{3}\langle n_i|\left(\hat{a}_i^2 + \hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \hat{a}_i^{\dagger 2}\right)|n_i\rangle + \frac{\hbar\omega}{4}\sum_{i=1}^{3}\langle n_i|\left(-\hat{a}_i^{\dagger 2} + \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i + \hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^2\right)|n_i\rangle,$$

Mit $\hat{a}_i|n_i\rangle = \sqrt{n_i}|n_i - 1\rangle$ und $\hat{a}_i^\dagger|n_i\rangle = \sqrt{n_i+1}|n_i+1\rangle$ erkennen wir sofort, dass nur die gemischten Operatoren, also aus Auf- und Absteigeoperator bestehende Terme, überleben. Wir können also vereinfachen zu:

$$\langle n|\hat{H}|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\sum_{i=1}^{3}\left\{\langle n_i|\hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger|n_i\rangle + \langle n_i|\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i|n_i\rangle\right\} + \frac{\hbar\omega}{4}\sum_{i=1}^{3}\left\{\langle n_i|\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i|n_i\rangle + \langle n_i|\hat{a}_i\hat{a}_i^\dagger|n_i\rangle\right\},$$

Ausführen der Operatoren liefert:

$$
\begin{aligned}
\langle n|\hat{H}|n\rangle &= \frac{\hbar\omega}{4}\sum_{i=1}^{3}\left\{\langle n_i|\,(n_i+1)\,|n_i\rangle + \langle n_i|\,(n_i)\,|n_i\rangle\right\} + \frac{\hbar\omega}{4}\sum_{i=1}^{3}\left\{\langle n_i|\,(n_i)\,|n_i\rangle + \langle n_i|\,(n_i+1)\,|n_i\rangle\right\} \\
&= \frac{\hbar\omega}{4}\sum_{i=1}^{3}\left\{2n_i+1\right\} + \frac{\hbar\omega}{4}\sum_{i=1}^{3}\left\{2n_i+1\right\} \\
&= \frac{\hbar\omega}{4}\left\{2n_1+1+2n_2+1+2n_3+1\right\} + \frac{\hbar\omega}{4}\left\{2n_1+1+2n_2+1+2n_3+1\right\} \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\left\{n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right\} + \frac{\hbar\omega}{2}\left\{n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right\} \\
&= \hbar\omega\left\{n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2}\right\} = \langle n|E_n|n\rangle.
\end{aligned}
$$

Somit folgt also für das Energiespektrum des 3D harmonischen Oszillators:

$$
E_n = \hbar\omega\left(\sum_{i=1}^{3} n_i + \frac{3}{2}\right).
$$

b)

Es ist der Entartungsgrad der Energieeigenwerte zu bestimmen. Hierzu betrachten wir die Summe der n_i, wobei wir bestimmen müssen wie viele verschiedene Kombinationen existieren, um mit den n_i einen bestimmten Wert n erzeugen zu können. Es gilt also:

$$
n = n_1 + n_2 + n_3.
$$

Wir definieren den Entartungsgrad als N. Fixieren wir nun eines der n_i, dann hat n_j $(i \neq j)$ nur noch die Möglichkeit die Zahlen $n - n_i$ und die 0 einzunehmen (dies würde z.B. im Fall $n = 1$ und $n_i = 0$ nicht erreicht werden mit $n - n_i = 1 - 0 = 1 \neq 0$). Sind jedoch n_i und n_j gewählt, ist n_k $(i \neq j \neq k \neq i)$, automatisch bestimmt nämlich als der Rest der bis zu n fehlt, daher liefert also n_k keine weitere Entartung. Somit erhalten wir also für das fixierte n_i genau $n - n_i + 1$ mögliche Werte für n_j und wir können also ansetzen:

$$
N = \sum_{n_i=0}^{n}\left(n - n_i + 1\right) = \sum_{n_i=0}^{n}\left((n+1) - n_i\right).
$$

Die Bestimmung dieses Terms, können wir durchführen, indem wir uns eine allgemeine Formel für die Lösung von Problemen dieser Art herleiten. Hierzu machen wir eine kleine Induktion:

$$
\sum_{n=0}^{N}(n+a) = (N+1)\,a + \underbrace{\sum_{n=0}^{N} n}_{\frac{N}{2}(N+1)} = (N+1)\,a + \frac{N}{2}(N+1) = (N+1)\left[a + \frac{N}{2}\right]
$$

Die Definition der arithmetischen Reihe wurde verwendet mit $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N}{2}(N+1)$ (dies können wir verwenden, da $\sum_{n=0}^{N} n$ für $n=0$ nur eine 0 liefert). (Zudem wird die Addition aber $N+1$-mal ausgeführt, da die Summe von 0 bis N läuft und somit der Term a $(N+1)$-mal vorkommt).

Für den Fall $N=1$ folgt:

$$\sum_{n=0}^{1}(n+a) = (0+a)+(1+a) = 1+2a$$

bzw.

$$\sum_{n=0}^{1}(n+a) = (N+1)\left[a+\frac{N}{2}\right]|_{N=1} = (1+1)\left[a+\frac{1}{2}\right] = 2a+1.$$

Nun betrachten wir $N = N+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N+1}(n+a) &= (0+a)+(1+a)+\ldots+(N+1+a) = (1+2+\ldots+N+1)+(N+2)\,a \\ &= \; = \underbrace{\sum_{n=0}^{N+1} n}_{\frac{(N+1)}{2}(N+2)} + (N+2)\,a = (N+2)\left[a+\frac{(N+1)}{2}\right]\end{aligned}$$

bzw.

$$\sum_{n=0}^{N+1}(n+a) = (N+1)\left[a+\frac{N}{2}\right]|_{N=N+1} = (N+1+1)\left[a+\frac{N+1}{2}\right] = (N+2)\left[a+\frac{(N+1)}{2}\right].$$

$\square$

Wir können also unsere gezeigte Formel auf das Problem anwenden und erhalten

$$N = (n+1)\left[(n+1)-\frac{n}{2}\right],$$

umformen liefert:

$$N = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n^2}{2}+\frac{3}{2}n+1.$$

Dies ist also der Entartungsgrad des 3-dimensionalen harmonischen Oszillators.