Heiko Dumlich, Max Hoffmann 3. Dezember 2006

7 Übungsblatt Theoretische Physik IV

7.1 (Kohärente Zustände)

Wir betrachten den harmonischen Oszillator. Für dessen Hamiltonoperator gilt:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

mit dem Vernichtungs- und Erzeugungsoperator:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \quad \text{bzw.} \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right),$$

die die Vertauschungsrelation $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ erfüllen. Die Eigenzustände von $\hat{H}$ werden mit $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ bezeichnet und sind orthonormiert,$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$. Ausserdem gilt:

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \,\text{für n>0}, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ kann man einen sogenannten kohärenten Zustand definieren durch

$$|\varphi_\lambda\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

a)

Es ist zu zeigen, dass $|\varphi_\lambda\rangle$ ein Eigenzustand des Operators $\hat{a}$ ist und dessen Eigenwert zu bestimmen. Wir wenden also den Operator an:

$$\hat{a}|\varphi_\lambda\rangle = \hat{a}\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

da die Exponentialfunktion für ein bestimmtes λ, welches eine Zahl ist eine Konstante liefert, können wir den Operator $\hat{a}$ an diesem vorbeiziehen. Da nun auch die Summe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}$ nur eine Zahl liefert, dürfen wir den Operator auch hieran vorbeiziehen, somit folgt:

$$\hat{a}|\varphi_\lambda\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle,$$

Wir kennen jedoch $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, somit folgt also:

$$\hat{a}|\varphi_\lambda\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle,$$

wir können nun $n = n+1$ setzen und erhalten:

$$\hat{a}|\varphi_\lambda\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}\sqrt{n+1}|n\rangle,$$

Da der erste Wert $n = -1$ eine 0 liefert, können wir bei 0 starten und nutzen, dass $(n+1)! = (n+1)\,n!$ gilt, somit folgt:

$$\hat{a}|\varphi_\lambda\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{\sqrt{n!\,(n+1)}}\sqrt{n+1}|n\rangle,$$

nun können wir ein λ vorziehen und den Faktor $\sqrt{n+1}$ aus Zähler und Nenner kürzen, dies liefert:

$$\hat{a}|\varphi_\lambda\rangle = \lambda\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

Nun sehen wir jedoch, mit Hilfe der Definition von $|\varphi_\lambda\rangle$:

$$\hat{a}|\varphi_\lambda\rangle = \lambda|\varphi_\lambda\rangle,$$

Somit ist also $|\varphi_\lambda\rangle$ Eigenzustand des Operators $\hat{a}$ und für den Eigenwert finden wir λ.

b)

Es ist zu zeigen, dass $\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle = 1$ und $\langle\varphi_{\lambda_1}|\varphi_{\lambda_2}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda_1-\lambda_2|^2 + i\Im\left(\lambda_1^*\lambda_2\right)\right)$.

Zuerst zeigen wir, dass $\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle = 1$, gilt, wir rechnen also das Skalarprodukt explizit aus:

$$\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\frac{\lambda^{*n}}{\sqrt{n!}}\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

dies liefert:

$$\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\exp\left(-|\lambda|^2\right)\frac{\lambda^{*n}\lambda^n}{n!}|n\rangle.$$

Wir können da wir nur Zahlen zwischen Bra und Ket haben, diese rausziehen und $\langle n|n\rangle = \delta_{nn} = 1$ nutzen, dies liefert:

$$\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-|\lambda|^2\right)\frac{\lambda^{*n}\lambda^n}{n!}$$

Nun nutzen wir die Definition der Exponentialfunktion $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$, auf unseren Fall angewendet, folgt:

$$\langle \varphi_\lambda | \varphi_\lambda \rangle = \exp\left(- |\lambda|^2 \right) \exp\left(|\lambda|^2 \right),$$

Somit folgt also das zu zeigende:

$$\langle \varphi_\lambda | \varphi_\lambda \rangle = 1.$$

Betrachten wir nun den Fall, dass wir zwei verschiedene Zahlen haben, also λ_1 und λ_2, dann folgt explizit:

$$\langle \varphi_{\lambda_1} | \varphi_{\lambda_2} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp\left(-\frac{1}{2} |\lambda_1|^2 \right) \frac{\lambda_1^{*n}}{\sqrt{n!}} \exp\left(\frac{1}{2} |\lambda_2|^2 \right) \frac{\lambda_2^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle,$$

wir können wieder umschreiben:

$$\langle \varphi_{\lambda_1} | \varphi_{\lambda_2} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp\left(-\frac{1}{2} \left[|\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2 \right] \right) \frac{(\lambda_1^* \lambda_2)^n}{n!} | n \rangle,$$

Wir können wieder ausnutzen, dass $\langle n | n \rangle = \delta_{nn} = 1$, somit folgt:

$$\langle \varphi_{\lambda_1} | \varphi_{\lambda_2} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[|\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2 \right] \right) \frac{(\lambda_1^* \lambda_2)^n}{n!}.$$

Die Reihe liefert wieder die Exponentialfunktion:

$$\langle \varphi_{\lambda_1} | \varphi_{\lambda_2} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \left[|\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2 \right] \right) \exp\left(\lambda_1^* \lambda_2 \right),$$

Nun kann man hierfür auch schreiben:

$$\langle \varphi_{\lambda_1} | \varphi_{\lambda_2} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\lambda_1 \lambda_1^* - \lambda_2 \lambda_2^* - 2 \lambda_1^* \lambda_2 \right] \right),$$

wir addieren eine $0 = \lambda_1 \lambda_2^* - \lambda_1 \lambda_2^*$, mit $|\lambda_1 - \lambda_2|^2 = \left(\lambda_1 \lambda_1^* - \lambda_1 \lambda_2^* - \lambda_2 \lambda_1^* - \lambda_2 \lambda_2^* \right)$, folgt:

$$\langle \varphi_{\lambda_1} | \varphi_{\lambda_2} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \left[|\lambda_1 - \lambda_2|^2 + \lambda_1 \lambda_2^* - \lambda_1^* \lambda_2 \right] \right),$$

es folgt aber $-\frac{1}{2} \left(\lambda_1 \lambda_2^* - \lambda_1^* \lambda_2 \right) = \frac{1}{2} \left(\lambda_1^* \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^* \right)$, wir können hierbei $\lambda_1 = a + bi$ und $\lambda_2 = c + di$ schreiben und erhalten $\frac{1}{2} \left(\lambda_1^* \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^* \right) = \frac{1}{2} \left\{ ac + bd + i(ad - bc) - \left[ac + bd - i(ad - bc) \right] \right\} = \frac{1}{2} 2i (ad - bc) = i(ad - bc)$, dies entspricht aber gerade $i \Im \left(\lambda_1^* \lambda_2 \right)$, somit folgt also:

$$\langle \varphi_{\lambda_1} | \varphi_{\lambda_2} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} |\lambda_1 - \lambda_2|^2 + i \Im \left(\lambda_1^* \lambda_2 \right) \right),$$

das gesuchte Ergebnis.

c)

Es sind die Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}\,\hat{x}^2$ und $\hat{p}^2$ durch die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ auszudrücken. Es gilt also für die Operatoren:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

Somit folgt also für die Operatoren:

$$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(2\hat{x})\,,$$

dies können wir umformen und wir erhalten:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right).$$

Der Impulsoperator berechnet sich mit:

$$\hat{a}^\dagger - \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\frac{-2i\hat{p}}{m\omega}\right),$$

Dies können wir umformen zu:

$$\hat{p} = i\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}.$$

Wir können nun den Orts- und Impulsoperator quadrieren und erhalten:

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \qquad \hat{p}^2 = -\left(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\frac{m\hbar\omega}{2}.$$

Wir nutzen die Kommutatorbeziehung aus $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1 = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}$, hieraus ergibt sich $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$. Dies können wir in die beiden quadrierten Operatoren einsetzen und erhalten:

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \hat{a}^{\dagger 2}\right) \qquad \hat{p}^2 = \frac{m\hbar\omega}{2}\left(-\hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 - \hat{a}^2\right).$$

Wir können jetzt die Erwartungswerte berechnen, wobei wir mit dem Ortsoperator beginnen:

$$\langle\hat{x}\rangle = \langle\varphi_\lambda|\hat{x}|\varphi_\lambda\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\varphi_\lambda|\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)|\varphi_\lambda\rangle,$$

da wir den Eigenwert von $\hat{a}|\varphi_\lambda\rangle = \lambda$ bereits in a) bestimmt haben und die duale Korrespondenz mit $\langle\varphi_\lambda|\hat{a}^\dagger = \langle\varphi_\lambda|\lambda^*$ nutzen können, ergibt sich:

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\lambda^* + \lambda\right)\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle,$$

mit $\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle = 1$, wie in b) gezeigt, somit folgt:

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\underbrace{(\lambda^* + \lambda)}_{2\Re(\lambda)} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Re\left(\lambda\right).$$

Nun folgt $\langle\hat{p}\rangle$:

$$\langle\hat{p}\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\langle\varphi_\lambda|\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)|\varphi_\lambda\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\underbrace{(\lambda^* - \lambda)}_{-i2\Im(\lambda)} = \sqrt{2\hbar m\omega}\Im\left(\lambda\right).$$

Kommen wir zu $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$, mit $\Delta\hat{x} = \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle$. Dafür können wir $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle = \langle\hat{x}^2 - 2\hat{x}\langle\hat{x}\rangle + \langle\hat{x}\rangle^2\rangle$ schreiben, und nun die Operatoren und Erwartungswerte einsetzen, die wir bereits oben bestimmt haben:

$$\begin{aligned}
\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle &= \langle\varphi_\lambda|\hat{x}^2 - 2\hat{x}\langle\hat{x}\rangle + \langle\hat{x}\rangle^2|\varphi_\lambda\rangle \\
&= \langle\varphi_\lambda|\hat{x}^2|\varphi_\lambda\rangle \\
&- 2\langle\hat{x}\rangle\langle\varphi_\lambda|\hat{x}|\varphi_\lambda\rangle \\
&+ \langle\hat{x}\rangle^2 \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\varphi_\lambda|\left(\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \hat{a}^{\dagger 2}\right)|\varphi_\lambda\rangle \\
&- 2\langle\hat{x}\rangle^2 + \langle\hat{x}\rangle^2 \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\lambda^2 + 2\lambda^*\lambda + 1 + \lambda^{*2}\right) \\
&- \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\lambda^{*2} + 2\lambda^*\lambda + \lambda^2\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also für den Erwartungswert:

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}.$$

Fahren wir fort mit dem Erwartungswert $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$, welcher relativ analog zu $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ berechnet werden kann:

$$\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle = \langle\varphi_\lambda|\hat{p}^2 - 2\hat{p}\langle\hat{p}\rangle + \langle\hat{p}\rangle^2|\varphi_\lambda\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m\hbar\omega}{2}\langle\varphi_\lambda|\left(-\hat{a}^{\dagger 2}+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1-\hat{a}^2\right)|\varphi_\lambda\rangle \\
&- \langle\hat{p}\rangle^2 \\
&= \frac{m\hbar\omega}{2}\left(-\lambda^{*2}+2\lambda^*\lambda+1-\lambda^2\right) \\
&+ \frac{m\hbar\omega}{2}\left(\lambda^{*2}-2\lambda^*\lambda+\lambda^2\right) \\
&= \frac{m\hbar\omega}{2}.
\end{aligned}
$$

Der Erwartungswert ist also:

$$
\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}.
$$

Das Produkt der beiden letzten Ergebnisse (der Orts- und Impulsunschärfe zum Quadrat) liefert:

$$
\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}
$$

die (quadrierte) Heisenbergsche Unschärferelation.

d)

Es ist zu zeigen, dass die Zeitabhängigkeit eines kohärenten Zustandes durch:

$$
|\varphi_\lambda(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right)|\varphi_{\lambda(t)}\rangle,
$$

mit $\lambda(t) = \lambda\exp(-i\omega t)$ gegeben ist. Hierzu wenden wir den Zeitentwicklungsoperator auf den kohärenten Zustand an:

$$
|\varphi_\lambda(t)\rangle = \hat{U}(t_0;t)|\varphi_\lambda\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)|\varphi_\lambda\rangle,
$$

da $\hat{H}$ zeitunabhängig ist, erhalten wir obige Form und mit $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$ können wir:

$$
|\varphi_\lambda(t)\rangle = \exp\left(-i\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)t\right)|\varphi_\lambda\rangle,
$$

schreiben. Explizites Aufschreiben des kohärenten Zustandes:

$$
|\varphi_\lambda(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right)\exp\left(-i\omega t\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,
$$

und die Reihendarstellung der Exponentialfunktion der Operatoren führt auf:

$$|\varphi_\lambda(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right)\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(-i\omega t)^m}{\sqrt{n!}m!}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^m|n\rangle.$$

Es folgt jedoch $\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\right)\sqrt{n}|n-1\rangle = n|n\rangle$, und dieses wird m-mal ausgeführt, womit wir:

$$|\varphi_\lambda(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right)\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(-i\omega t)^m}{\sqrt{n!}m!}(n)^m|n\rangle,$$

erhalten. Dieses n^m ziehen wir in den Term $(-i\omega t)^m$:

$$|\varphi_\lambda(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right)\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(-ni\omega t)^m}{\sqrt{n!}m!}|n\rangle.$$

Das Übergehen in die Exponentialschreibweise $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-ni\omega t)^m}{m!} = \exp(-ni\omega t) = [\exp(-i\omega t)]^n$ und Ausnutzen, dass $\lambda(t) = \lambda\exp(-i\omega t)$ gilt, führt uns auf:

$$|\varphi_\lambda(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right)\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda(t)|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda(t)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

Der Betragsquadratterm wird durch den Exponentialterm nicht verändert ($|\exp(-i\omega t)|^2 = 1$), daher können wir das $|\lambda|^2$ in $|\lambda(t)|^2$ umschreiben. Nun sehen wir jedoch, dass der hintere Teil gerade $|\varphi_{\lambda(t)}\rangle$ ist und somit folgt das zu Zeigende:

$$|\varphi_\lambda(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right)|\varphi_{\lambda(t)}\rangle.$$

e)

Es sind die zeitabhängigen Erwartungswerte zu bestimmen, wobei wir nutzen können, was wir in a) gezeigt haben $\hat{a}|\varphi_\lambda\rangle = \lambda|\varphi_\lambda\rangle$, somit folgt $\hat{a}|\varphi_{\lambda(t)}\rangle = \lambda(t)|\varphi_{\lambda(t)}\rangle = \lambda\exp(-i\omega t)|\varphi_{\lambda(t)}\rangle$. (Zur Sicherheit haben wir das natürlich auch nochmal von Hand verifiziert, aber wir wollen ja nicht unnötig Tinte verbrauchen). Wir bestimmen nun also die Erwartungswerte:

$$\langle\hat{x}(t)\rangle = \langle\varphi_\lambda(t)|\hat{x}|\varphi_\lambda(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\varphi_{\lambda(t)}|\exp\left(\frac{i}{2}\omega t\right)\left(\hat{a}^\dagger+\hat{a}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right)|\varphi_{\lambda(t)}\rangle,$$

Die Anwendung der Operatoren liefert:

$$\langle\hat{x}(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\varphi_{\lambda(t)}|\lambda^*\exp(i\omega t) + \lambda\exp(-i\omega t)|\varphi_{\lambda(t)}\rangle,$$

Jetzt können wir noch die oben (für nichtzeitabhängige λ) gezeigte Beziehung $\langle\varphi_{\lambda(t)}|\varphi_{\lambda(t)}\rangle = 1$ aus b) nutzen und erhalten:

$$\langle \hat{x}(t) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\exp(i\omega t) \lambda^* + \lambda \exp(-i\omega t) \right).$$

Das gleiche tun wir nun für den zeitabhängigen Impulsoperatorerwartungswert:

$$\langle \hat{p}(t) \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle \varphi_{\lambda(t)} | \exp\left(\frac{i}{2}\omega t\right) \left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right) \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right) | \varphi_{\lambda(t)} \rangle,$$

Durch Anwendung der Operatoren und Ausführen des Skalarproduktes erhalten wir somit:

$$\langle \hat{p}(t) \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \left(\exp(i\omega t) \lambda^* - \lambda \exp(-i\omega t) \right).$$

f)

Kommen wir zur letzten Teilaufgabe, bei dieser bestimmen wir $\langle (\Delta\hat{x}(t))^2 \rangle$ und $\langle (\Delta\hat{p}(t))^2 \rangle$. Wir erhalten also:

$$\langle (\Delta\hat{x}(t))^2 \rangle = \langle \varphi_{\lambda(t)} | \exp\left(\frac{i}{2}\omega t\right) (\Delta\hat{x})^2 \exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right) | \varphi_{\lambda(t)} \rangle,$$

Nun können wir mit $(\Delta\hat{x})^2 = \hat{x}^2 - 2\hat{x}\langle\hat{x}\rangle + \langle\hat{x}\rangle^2$ umschreiben zu:

$$\langle (\Delta\hat{x}(t))^2 \rangle = \langle \varphi_{\lambda(t)} | \hat{x}^2 | \varphi_{\lambda(t)} \rangle - \langle \varphi_{\lambda(t)} | \hat{x} | \varphi_{\lambda(t)} \rangle^2,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass der Erwartungswert von $-2\hat{x}\langle\hat{x}\rangle + \langle\hat{x}\rangle^2$ uns $-2\langle\hat{x}\rangle^2 + \langle\hat{x}\rangle^2 = -\langle\hat{x}\rangle^2$ liefert (s. auch äquivalent für nicht zeitabhängigen Fall). Wir können nun noch den Rest berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta\hat{x}(t))^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \varphi_{\lambda(t)} | \left(\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \hat{a}^{\dagger 2} \right) | \varphi_{\lambda(t)} \rangle \\
&- \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\exp(i\omega t) \lambda^* + \lambda \exp(-i\omega t) \right)^2 \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\lambda^2 \exp(-2i\omega t) + 2\lambda^*\lambda + 1 + \lambda^{*2} \exp(2i\omega t) \right) \\
&- \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\exp(2i\omega t) \lambda^{*2} + 2\lambda^*\lambda + \lambda^2 \exp(-2i\omega t) \right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega},
\end{aligned}$$

Äquivalent zum zeitunabhängigen Fall. Es folgt für den zweiten zu bestimmenden Operator:

$$\langle (\Delta\hat{p}(t))^2 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2},$$

da wir für $\left\langle (\Delta\hat{p}(t))^2 \right\rangle = \left\langle \hat{p}(t)^2 \right\rangle - \langle \hat{p}(t) \rangle^2$ rechnen:

$$\langle \hat{p}(t) \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(e^{i\omega t}\lambda^* - e^{-i\omega t}\lambda\right)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}(t) \rangle^2 &= -\frac{\hbar m\omega}{2} \left(e^{i2\omega t}\lambda^{*2} + \lambda^2 e^{-i2\omega t} - 2\lambda\lambda^*\right) \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2} \left(2|\lambda|^2 - e^{i2\omega t}\lambda^{*2} - e^{-i2\omega t}\lambda^2\right).
\end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{p}(t)^2 \right\rangle &= \langle \varphi_\lambda | \hat{p}(t)^2 | \varphi_\lambda \rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle \varphi_\lambda | \left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)^2 | \varphi_\lambda \rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle \varphi_\lambda | \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^2 | \varphi_\lambda \rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle \varphi_\lambda | \hat{a}^{\dagger 2} - 2\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1 + \hat{a}^2 | \varphi_\lambda \rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2} \left(-2|\lambda|^2 + e^{i2\omega t}\lambda^{*2} + e^{-i2\omega t}\lambda^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

was zusammen ergibt:

$$\begin{aligned}
\left\langle (\Delta\hat{p}(t))^2 \right\rangle &= \frac{\hbar m\omega}{2} \left(2|\lambda|^2 - e^{i2\omega t}\lambda^{*2} - e^{-i2\omega t}\lambda^2 - 2|\lambda|^2 + e^{i2\omega t}\lambda^{*2} + e^{-i2\omega t}\lambda^2 + 1\right) \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2}
\end{aligned}$$

Wir sehen somit, dass die (quadrierte) Heisenbergsche Unschärferelation zeitunabhängig ist:

$$\langle (\Delta\hat{x}(t))^2 \rangle \langle (\Delta\hat{p}(t))^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}.$$