Heiko Dumlich, Max Hoffmann 29. Oktober 2006

2 Übungsblatt Theoretische Physik IV

2.1 (Wellenpaket für freies Teilchen)

Die Wellenfunktion für ein freies Teilchen (Masse m) in einer Raumdimension sei zur Zeit $t = 0$ gegeben durch:

$$\psi(x, t = 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2} + ik_0 x\right) \tag{1}$$

a)

Für die Normierung gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi\psi^* = 1 \tag{2}$$

Somit folgt mit einsetzen von (1) in (2) :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, A^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2} + ik_0 x\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2} - ik_0 x\right) &= 1 \\
A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) &= 1 \\
\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} &= A
\end{aligned}$$

Wir können das Integral leicht berechnen, indem wir auf Polarkoordinaten wechseln, hierzu betrachten wir:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{b^2}\right) \\
&= \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r\, \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right) \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} d\xi\, \frac{rb^2}{2r}\, \exp(-\xi) \\
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) &= \sqrt{\pi b^2}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, folgt:

$$A = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{b}}$$

b)

$\psi(x,t=0)$ kann auch als Wellenpaket der Form:

$$\psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\tilde{\psi}(k)\exp(ikx),$$

geschrieben werden. Um $\tilde{\psi}(k)$ zu bestimmen, betrachten wir die Fouriertransformierte:

$$\tilde{\psi}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\psi(x,t=0)\exp(-ikx),$$

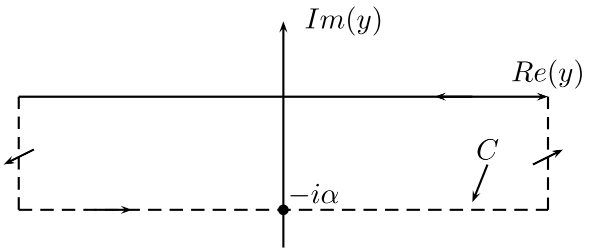
wobei einsetzen von (1) :

$$\tilde{\psi}(k)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}+i(k_0-k)x\right),$$

liefert. Nun müssen wir "klug" substituieren, um eine einfache Form zu erhalten, wobei unser Ziel $e^{-\xi^2}$ ist. Dazu ergibt die Substitution von $\xi=\frac{x}{\sqrt{2}b}-i(k_0-k)\frac{b}{\sqrt{2}}$, mit $-\xi^2=-\frac{x^2}{2b^2}+i(k_0-k)x+(k_0-k)^2\frac{b^2}{2}$, (wobei wir zusätzlich $\alpha=(k_0-k)\frac{b}{\sqrt{2}}$ definieren):

$$\tilde{\psi}(k)=\frac{Ab}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2}\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha}d\xi\,e^{-\xi^2}, \tag{3}$$

wobei $\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}b}\Leftrightarrow dx=d\xi\,\sqrt{2}b$. Nun können wir das Integral aus (3) lösen, indem wir den Residuensatz benutzen, dazu wählen wir den auf der folgenden Zeichnung beschriebenen Integrationsweg:



Es gilt also, wobei die zwei Wege von 0 nach $-i\alpha$ und $-i\alpha$ nach 0 nur 0 liefern:

$$\oint_C d\xi\,e^{-\xi^2}=0=\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha}d\xi\,e^{-\xi^2}-\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,e^{-\xi^2}=\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha}d\xi\,e^{-\xi^2}-\sqrt{\pi},$$

Für das Integral auf der reellen Achse gilt: $\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,e^{-\xi^2}=\sqrt{\pi}$, was wir bereits oben (Aufgabenteil a) (in leicht abgewandelter Form) gelöst hatten. Das Integral liefert also mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} d\xi \, e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}.$$

Für die Wellenfunktion $\tilde{\psi}(k)$ folgt:

$$\tilde{\psi}(k) = Abe^{-\alpha^2} = \left(\frac{b^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\left((k_0-k)\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Alternativ (ohne Residuensatz):

Man kann das Integral:

$$\tilde{\psi}(k) \quad = \quad \underbrace{\frac{A}{\sqrt{2\pi}}}_{=\tilde{A}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-x^2 \underbrace{/2b^2}_{=\alpha} + ix \underbrace{(k_0 - k)}_{=\beta}},$$

auch durch geschickte Differentiation lösen.

$$\begin{aligned}
&= \tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\alpha x^2} \left(\cos(\beta x) \underbrace{+ i \sin(\beta x)}_{=0 \text{ ungerade}}\right), \\
&= \tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\alpha x^2} \cos \beta x.
\end{aligned}$$

Betrachte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\psi}(k)}{\partial \beta} &= - \quad \tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \left(x e^{-\alpha x^2}\right) \sin \beta x, \\
\text{p.I.} \quad &= \underbrace{-\tilde{A} \frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha} \sin \beta x |_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{\beta}{2\alpha} \underbrace{\tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\alpha x^2} \cos \beta x}_{=\tilde{\psi}(k)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{\tilde{\psi}(k)} \frac{\partial \tilde{\psi}(k)}{\partial(\beta)} = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln\left(\tilde{\psi}(k)\right),$$

was man vergleichsweise einfach über β integrieren kann. Das heißt:

$$\ln\left(\tilde{\psi}(k)\right) = -\frac{\beta^2}{4\alpha} + c \Rightarrow \tilde{\psi}(k) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} = Ce^{-(k_0-k)^2 \frac{b^2}{2}}.$$

Um C zu bestimmen betrachte man $\tilde{\psi}(k_0)$. Zum einen gilt dann $\tilde{\psi}(k_0) = C$ und $\tilde{\psi}(k_0) = \tilde{A} \int dx \, e^{-\alpha x^2}$. Substituiert man $x = \frac{z}{\sqrt{\alpha}}$, folgt $dx = \frac{dz}{\sqrt{\alpha}}$ und es bleibt nur noch das bekannte Integral:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\tilde{A}}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} \\ &= \frac{\tilde{A}}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi} \\ &= \sqrt{\frac{b}{\sqrt{\pi}}} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist wie oben

$$\tilde{\psi}(k) = \sqrt{\frac{b}{\sqrt{\pi}}} e^{-(k_0-k)^2 \frac{b^2}{2}}.$$

c)

Wir wählen den Ansatz:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{\psi}(k) \exp(ikx) \exp(-i\omega t),$$

wobei ω aus $E = \hbar\omega = \frac{p^2}{2m}$ mit $|\vec{p}| = \hbar \left|\vec{k}\right| = \hbar k$ durch $\omega = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$ gegeben ist und $\tilde{\psi}(k)$ in Aufgabenteil b) bestimmt wurde. Wir erhalten nach einsetzen:

$$\psi(x,t) = \frac{Ab}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\left((k_0-k)\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} \exp(ikx) \exp\left(-i\frac{\hbar k^2}{2m} t\right),$$

dies können wir auch zusammenfassen in:

$$\psi(x,t) = \frac{Ab}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k_0^2 b^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp\left(k\left(ix + k_0 b^2\right)\right) \exp\left(-k^2\left(i\frac{\hbar}{2m}t + \frac{b^2}{2}\right)\right).$$

Zur Verifikation des Ansatzes, setzen wir dies nun in die Schrödingergleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t),$$

ein, wobei wir zuerst die linke und dann die rechte Seite betrachten:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = i\hbar\left(-i\frac{k^2\hbar}{2m}\right)\frac{Ab}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k_0^2 b^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp\left(k\left(ix + k_0 b^2\right)\right) \exp\left(-k^2\left(i\frac{\hbar}{2m}t + \frac{b^2}{2}\right)\right),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[(ik)\frac{Ab}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k_0^2 b^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp\left(k\left(ix + k_0 b^2\right)\right) \exp\left(-k^2\left(i\frac{\hbar}{2m}t + \frac{b^2}{2}\right)\right)\right],$$

das liefert also:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = \frac{k^2\hbar^2}{2m}\frac{Ab}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{k_0^2b^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,\exp\left(k\left(ix+k_0b^2\right)\right)\exp\left(-k^2\left(i\frac{\hbar}{2m}t+\frac{b^2}{2}\right)\right).$$

umgeschrieben:

$$E\,\psi = H\,\psi = \frac{k^2\hbar^2}{2m}\,\psi = \frac{p^2}{2m}\,\psi = \hbar\omega\,\psi.$$

Das heisst der Ansatz erfüllt die Schrödingergleichung.

Unser Ziel ist wie schon bei Aufgabenteil b) durch Substitution das Integral in die Form $e^{-\xi^2}$ zu bringen und dann mit Hilfe des Residuensatzes und einem geschickt gewählten Weg, zu lösen. um dies zu ermöglichen, müssen wir die Exponenten zuerst mit der binomischen Formel umformen, sodass wir $\exp\left[-(\beta k-\gamma)^2\right]$ erhalten. Um danach $\beta k-\gamma=\xi$ zu ersetzen und dann die gewünschte Form zu erlangen:

$$e^{-\xi^2} = e^{-(\beta k-\gamma)^2} = e^{\left(-\beta^2k^2+2\beta\gamma k-\gamma^2\right)}$$

Wir definieren die Funktionen $\beta(t) = \sqrt{i\frac{\hbar}{2m}t+\frac{b^2}{2}}$, somit haben wir bereits den ersten Term $\left(-\beta^2k^2\right)$ erhalten. Nun müssen wir dafür sorgen, dass wir einen Term mit $e^{2\beta\gamma k}$ erhalten, wobei wir bereits den Term mit k besitzen und nun nur noch die Funktion γ geschickt wählen müssen. Wie nach kurzer Überlegung einleuchtet, wählen wir $\gamma(x,t) = \frac{ix+k_0b^2}{2\beta(t)}$, da wir somit unseren Term direkt verwenden können, mit $\exp\left(\frac{2\beta k\left(ix+k_0b^2\right)}{2\beta}\right) = \exp(2\beta\gamma k)$. Nun müssen wir nur noch eine 1 multiplizieren, um den $e^{-\gamma^2}$-Term zu erzeugen. D.h. wir multiplizieren $e^{-\gamma^2+\gamma^2}=1$, da dieser nicht von k abhängt, können wir ihn vor das Integral ziehen und es folgt:

$$\psi(x,t) = \frac{Ab}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\gamma^2-\frac{k_0^2b^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,e^{-\xi^2},$$

Nun müssen wir die Integrationsvariable und die Grenzen noch bestimmen, wobei $\xi=\beta k-\gamma \Leftrightarrow \frac{d\xi}{\beta}=dk$, da jedoch $\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ sind, folgt für $\psi(x,t)$:

$$\psi(x,t) = \frac{Ab}{\sqrt{2\pi}\beta}\,e^{\gamma^2-\frac{k_0^2b^2}{2}}\int_{-\infty-\gamma}^{\infty-\gamma} d\xi\,e^{-\xi^2}.$$

Wir Integrieren über die Integrationsgrenzen, wobei $\gamma\in\mathbb{C}$, somit folgt wie bereits in b) $\int_{-\infty-\gamma}^{\infty-\gamma} d\xi\,e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}$. Für die Wellenfunktion gilt nach einsetzen:

$$\psi(x,t) = \frac{Ab}{\sqrt{2}\beta}\,e^{\gamma^2-\frac{k_0^2b^2}{2}} = \left(\frac{b^2}{4\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{i\frac{\hbar}{2m}t+\frac{b^2}{2}}}\,e^{\left(\frac{ix+k_0b^2}{2\sqrt{i\frac{\hbar}{2m}t+\frac{b^2}{2}}}\right)^2-\frac{k_0^2b^2}{2}}.$$

d)

Dür die Wahrscheinlichkeitsdichte gilt:

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \psi(x,t)\,\psi^*(x,t)\,,$$

wir setzen unser $\psi(x,t)$ aus Aufgabenteil c) ein und erhalten:

$$\rho(x,t) \;=\; \frac{b}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{b^2+\frac{i\hbar t}{m}}\sqrt{b^2-\frac{i\hbar t}{m}}}}_{(*)} \exp \underbrace{\left[-\frac{b^2k_0^2}{2}+\left(\frac{ix+k_0b^2}{\sqrt{2}\sqrt{b^2+\frac{i\hbar t}{m}}}\right)^2-\frac{b^2k_0^2}{2}+\left(\frac{-ix+k_0b^2}{\sqrt{2}\sqrt{b^2-\frac{i\hbar t}{m}}}\right)^2\right]}_{(**)}.$$

Die Terme $(*)$ und $(**)$ kann man vereinfachen:

$$\begin{aligned}
(*) &= \sqrt{\left(b^2+\frac{i\hbar t}{m}\right)\left(b^2-\frac{i\hbar t}{m}\right)} \\
&= \sqrt{b^4+2b^2\frac{i\hbar t}{m}-2b^2\frac{i\hbar t}{m}+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2} \\
&= \sqrt{b^4+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(**) &= -(bk_0)^2+\left(\frac{ix+k_0b^2}{\sqrt{2}\sqrt{b^2+\frac{i\hbar t}{m}}}\right)^2+\left(\frac{-ix+k_0b^2}{\sqrt{2}\sqrt{b^2-\frac{i\hbar t}{m}}}\right)^2 \\
&= -(bk_0)^2+\frac{-x^2+k_0^2b^4+2ixk_0b^2}{2\left(b^2+\frac{i\hbar t}{m}\right)}+\frac{-x^2+k_0^2b^4-2ixk_0b^2}{2\left(b^2-\frac{i\hbar t}{m}\right)}
\end{aligned}$$

... mit $\frac{\left(b^2-\frac{i\hbar t}{m}\right)}{\left(b^2-\frac{i\hbar t}{m}\right)}$ und $\frac{\left(b^2+\frac{i\hbar t}{m}\right)}{\left(b^2+\frac{i\hbar t}{m}\right)}$ erweitern und streichen. Der 2. und 3. Summand lauten dann:

$$\frac{1}{2\left(b^4+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2\right)}\left(-2b^2x^2+2k_0^2b^6+\frac{4xk_0b^2\hbar t}{m}\pm ixk_0b^4\pm\frac{ix^2\hbar t}{m}\pm\frac{k_0^2b^4i\hbar t}{m}\right),$$

wobei $\pm$ aus Platzgründen angeführt wurde um anzudeuten, dass diese Terme sich eliminieren. Dann lautet $(**)$:

$$(**) \;=\; -(bk_0)^2+\frac{1}{b^4+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2}\left(-b^2x^2+k_0^2b^6+\frac{2xk_0b^2\hbar t}{m}\right)$$

... $-(bk_0)^2$ in den Bruch ziehen ...

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b^4+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2}\left(-\left(\frac{k_0 b\hbar t}{m}\right)^2 - k_0^2 b^6 + k_0^2 b^6 - (bx)^2 + \frac{2xk_0 b^2\hbar t}{m}\right) \\
&= -\frac{b^2}{b^4+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2}\left(\frac{k_0\hbar t}{m} - x\right)^2
\end{aligned}
$$

Das heißt, es bleibt:

$$\rho(x,t) = \frac{b}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{b^4+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2}} e^{-\frac{b^2}{b^4+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2}\left(\frac{k_0\hbar t}{m}-x\right)^2}$$

Wenn man sich den Ausdruck für ρ genau anschaut, fällt unschwer auf, dass die Ortsabhängigkeit nur in dem Exponenten steckt. Der Faktor $(*)$ zeigt, dass die maximale Amplitude abfällt.

$$\rho_{max} = \frac{b}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{b^4+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2}}$$

... für große Zeiten t

$$\rho_{max} \propto \frac{1}{t}.$$

Für den Ort des Wahrscheinlichkeitsmaximums, also klassisch den Aufenthaltort, braucht man nur den Exponenten betrachten. ρ wird dann am größten, wenn der Exponent maximal, dass heißt in diesem Fall $(**) = 0$, wird. Oder

$$x = \frac{k_0\hbar t}{m}.$$

Das Wellenpaket bewegt sich also mit $v_G = \frac{k_0\hbar}{m}$ nach rechts. Um die örtliche Ausdehnung zu berechen ist der Abstand zu bestimmen, bei dem die Aufenhaltswahrscheinlichkeit nur noch dem e^{-1}-fachen der maximalen Aufenthaltswahrscheinlichkeit beträgt:

$$\frac{\rho_{max}(x_{max},t)}{\rho(x,t)} \stackrel{!}{=} e$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\frac{\rho_{max}(x_{max},t)}{\rho(x,t)}\right] = 1$$

Weil der Faktor vor der e-Funktion nicht von x abhängt, kürzt er sich gleich heraus. Und der Exponent von ρ_{max} ist null $\left(\ln\left(e^0\right) = \ln(1) = 0\right)$. Nun gilt es nach x aufzulösen:

$$0 + \frac{b^2\left(k_0\frac{\hbar t}{m} - x\right)^2}{b^4+\left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2} = 1,$$

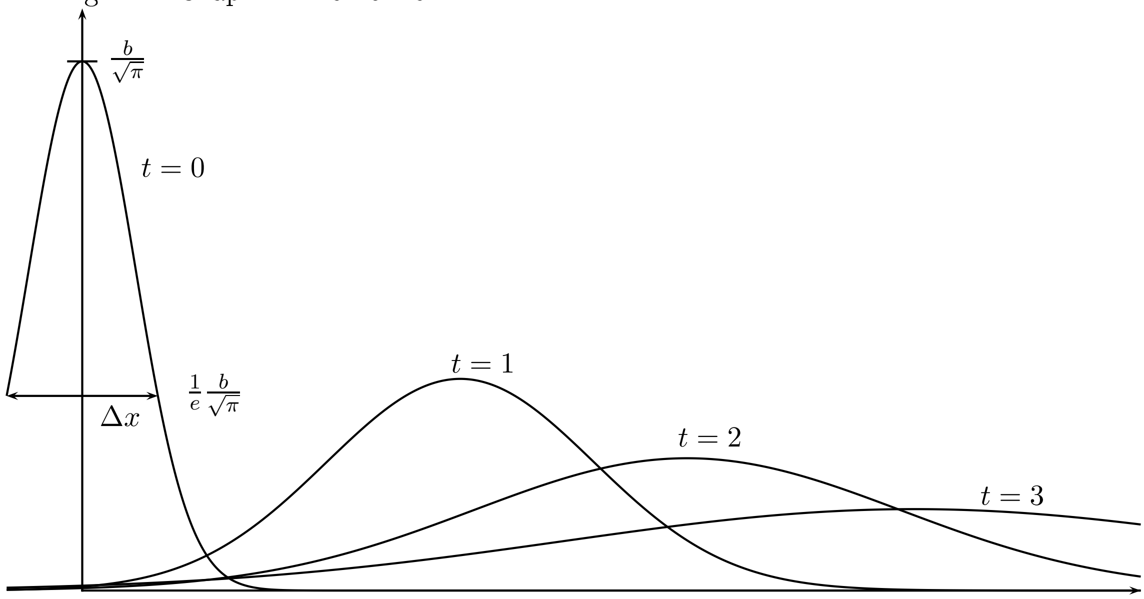
$$\Leftrightarrow b^2\left(k_0\frac{\hbar t}{m} - x\right)^2 = b^4 + \left(\frac{\hbar t}{m}\right)^2,$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{k_0 \hbar t}{m} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{ht}{mb}\right)^2}.$$

Der Term links vom Gleichheitszeichen ist jetzt gerade der Abstand zwischen der Stelle mit ρ_{max} und $\rho_{max}e^{-1}$. Die Breite des Wellenpaketes ist genau das Doppelte davon, also:

$$\Delta x = 2\sqrt{b^2 + \left(\frac{\hbar t}{mb}\right)^2}.$$

Hier können wir erkennen, dass das Wellenpaket im Raum zerfließen muss, da Δx zeitabhängig ist und somit mit $\Delta x \tilde{} t$ mit größerem t immer breiter wird. Dies ist gut auf folgender Graphik zu erkennen:



2.2 (Galilei-Transformation)

Zu zeigen ist, dass die eindimensionale Schrödingergleichung für ein freies Teilchen invariant ist unter der Galilei-Transformation:

$$x' = x - vt \quad , \quad t' = t,$$

wenn man gleichzeitig die Wellenfunktion in folgender Weise transformiert:

$$\tilde{\psi}\left(x', t'\right) = \exp\left(i\, f\left(x, t\right)\right)\, \psi\left(x, t\right). \tag{4}$$

Ableiten nach der Zeit von Bedingung $x' = x - vt$ liefert $\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \Leftrightarrow v' = v_g - v$, mit v_g der Gruppengeschwindigkeit.

Wir betrachten hierzu die Wellenzahl k', wobei wir folgende Zusammenhänge benutzen:

$$E = \frac{1}{2} m v_g^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \frac{m v_g}{\hbar} = k.$$

Für k' folgt, da dieses Wellenpaket sich nach der Galilei-Transformation mit einer Geschwindigkeit $v' = v_g - v$ bewegt:

$$k' = \frac{m}{\hbar} v' = k - \frac{mv}{\hbar}.$$

Für die Kreisfrequenz folgt mit:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar\omega \Rightarrow \frac{\hbar k^2}{2m} = \omega,$$

somit folgt für die Kreisfrequenz ω' im transformierten System:

$$\omega' = \frac{\hbar k'^2}{2m} = \frac{\hbar}{2m}\left(k - \frac{mv}{\hbar}\right)^2 = \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar}{2m}\frac{2kmv}{\hbar} + \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2 = \omega - kv + \frac{mv^2}{2\hbar}.$$

Wir bestimmen nun $f(x,t)$, indem wir in (5) folgende Gleichungen einsetzen:

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \exp\left(i\left(kx - \omega t\right)\right), \\
\psi\left(x', t'\right) &= \exp\left(i\left(k'x' - \omega' t'\right)\right),
\end{aligned}$$

dies liefert:

$$\begin{aligned}
\exp\left(i\left(k'x' - \omega' t'\right)\right) &= \exp\left(i\, f(x,t)\right)\, \exp\left(i\left(kx - \omega t\right)\right), \\
\left(k - \frac{mv}{\hbar}\right)(x - vt) - \left(\omega - kv + \frac{mv^2}{2\hbar}\right) t &= f(x,t) + (kx - \omega t), \\
\left(k - \frac{mv}{\hbar}\right)(x - vt) - \left(\omega - kv + \frac{mv^2}{2\hbar}\right) t - (kx - \omega t) &= f(x,t), \\
kx - kvt - \frac{mvx}{\hbar} + \frac{mv^2}{\hbar} t - \omega t + kvt - \frac{mv^2}{2\hbar} t - kx + \omega t &= f(x,t), \\
\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}\right) t - \left(\frac{mv}{\hbar}\right) x &= f(x,t). \\
\frac{1}{\hbar}(E\, t - p\, x) &= f(x,t).
\end{aligned}$$

Zur Verifikation setzen wir den Term in die Schrödinger Gleichung ein:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} \tilde{\psi}\left(x', t'\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \tilde{\psi}\left(x', t'\right),$$

Für den Term auf der linken Seite erhalten wir:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}\right)t-\left(\frac{mv}{\hbar}\right)x\right)\exp\left(i\left(kx-\omega t\right)\right) &= \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega\right)t+i\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)\left(x'+vt'\right)\right) &= \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega+kv-\frac{mv^2}{\hbar}\right)t'+i\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)x'\right) &= \\
-\hbar\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega+kv-\frac{mv^2}{\hbar}\right)\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega\right)t'+i\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)x\right). &
\end{aligned}$$

Betrachten wir den Term auf der rechten Seite, so folgt:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega\right)t+i\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)x\right) &= \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega\right)t+i\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)\left(x'+vt\right)\right) &= \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega+kv-\frac{mv^2}{\hbar}\right)t+i\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)x'\right) &= \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(ik-i\frac{mv}{\hbar}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\exp\left(i\left(-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega+kv\right)t+\left(ik-\frac{mv}{\hbar}\right)x'\right) &= \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(ik-i\frac{mv}{\hbar}\right)^2\exp\left(i\left(-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega+kv\right)t+i\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)x'\right) &= \\
\frac{\hbar^2}{2m}\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)^2\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega\right)t+i\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)x\right) &= \\
\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-kv\hbar+\frac{mv^2}{2}\right)\exp\left(i\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega\right)t+i\left(k-\frac{mv}{\hbar}\right)x\right) &=
\end{aligned}$$

Somit folgt also wenn wir beide Seiten der Schrödingergleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
-\hbar\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{\hbar}-\omega+kv-\frac{mv^2}{\hbar}\right) &= \left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-kv\hbar+\frac{mv^2}{2}\right), \\
-\frac{1}{2}mv^2+\hbar\omega-kv\hbar+mv^2 &= \frac{\hbar^2k^2}{2m}-kv\hbar+\frac{mv^2}{2}, \\
\hbar\omega &= \frac{\hbar^2k^2}{2m}.
\end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt da $E=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\hbar\omega$, somit erfüllt auch die mit der Galilei-Transformation transformierte Welle die Schrödingergleichung, somit ist also auch die eindimensionale Schrödingergleichung für ein freies Teilchen invariant unter der Galilei-Transformation.