Heiko Dumlich, Max Hoffmann 11. Februar 2007

14 Übungsblatt Theoretische Physik IV

14.1 (Harmonischer Oszillator in 2 Dimensionen mit Störung)

Wir betrachten einen isotropen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonian:

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right).$$

a)

Es sind die Eigenenergien der drei energetisch niedrigsten Zustände anzugeben und es ist zu klären, ob es Entartungen gibt.

Wir können den Hamiltonian umschreiben:

$$\hat{H}_0 = \underbrace{\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2}_{\hat{H}_{0x}} + \underbrace{\frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2}_{\hat{H}_{0y}}$$

wobei wir für den eindimensionalen harmonischen Oszillator wissen, dass $\hat{H}_{1d} = \left(\hat{N}_{1d} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ gilt, wobei somit für die Eigenenergien:

$$\langle n_{1d}|\hat{H}_{1d}|n_{1d}\rangle = E_{n_{1d}}$$

folgt mit $E_{n_{1d}} = \left(n_{1d} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Betrachten wir nun den Fall für unseren Hamiltonian in 2D:

$$\begin{aligned}
\langle n_x n_y|\hat{H}_0|n_x n_y\rangle &= \langle n_x n_y|\hat{H}_{0x}|n_x n_y\rangle + \langle n_x n_y|\hat{H}_{0y}|n_x n_y\rangle \\
&= \langle n_x n_y|\left(\hat{N}_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n_x n_y\rangle + \langle n_x n_y|\left(\hat{N}_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n_x n_y\rangle \\
&= \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\langle n_x n_y|n_x n_y\rangle + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\langle n_x n_y|n_x n_y\rangle \\
&= \left(n_x + n_y + 1\right)\hbar\omega.
\end{aligned}$$

Das heisst wir finden für die Eigenenergien $E_{n_x,n_y} = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega$. Wir betrachten die drei niedrigsten Eigenenergien:

$$\begin{aligned}
E_{00} &= \hbar\omega \\
E_{10} &= 2\hbar\omega \\
E_{01} &= 2\hbar\omega
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass hierbei eine Energieentartung für $n_x = 1$, $n_y = 0$ und $n_x = 0$, $n_y = 1$ auftritt. Allgemein kann man sagen, die Entartung ist $(n+1)$-fach.

b)

Es wirkt zusätzlich die Störung

$$\hat{V} = \gamma m\omega^2 \hat{x}\hat{y}$$

mit $\gamma \ll 1$. Es sind die Energiekorrekturen der in a) gefundenen Zustände in erster Ordnung Störungstheorie, sowie die Eigenkets in 0-ter Ordnung zu bestimmen.

Die Energiekorrekturen erster Ordnung Störungstheorie sind gegeben mit:

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle n_x n_y | \hat{V} | n_x n_y \rangle$$

wobei wir $\hat{V}$ umschreiben können zu:

$$\hat{V} = \gamma m\omega^2 \hat{x}\hat{y} = \gamma m\omega^2 \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger\right) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger\right) = \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \left(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger\right) \left(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger\right)$$

mit $\left(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger\right) \left(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger\right) = \hat{a}_x\hat{a}_y + \hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger$. Wir betrachten den ersten Fall aus Aufgabenteil a):

$$\begin{aligned}
\Delta E_0^{(1)} &= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \langle 00| \left(\hat{a}_x\hat{a}_y + \hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger\right) |00\rangle \\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \left(\langle 00|\hat{a}_x\hat{a}_y|00\rangle + \langle 00|\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger|00\rangle\right) \\
&+ \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \left(\langle 00|\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y|00\rangle + \langle 00|\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger|00\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \left(\langle 00|\sqrt{0}\sqrt{0}|-1,-1\rangle + \langle 00|\sqrt{0}\sqrt{1}|-11\rangle\right) \\
&+ \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \left(\langle 00|\sqrt{1}\sqrt{0}|1,-1\rangle + \langle 00|\sqrt{1}\sqrt{1}|11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \langle 00|11\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Somit verändert die Störung also die Energie für den Fall 00 nicht und es gilt auch mit dem Störpotential:

$$E_{00} = \hbar\omega.$$

Den zweiten und dritten Fall müssen wir mit der Störungstheorie für entartete Zustände behandeln, da die beiden Fälle entartet sind. Wir betrachten daher die Komponenten der Störungsmatrix:

$$\langle 10|\hat{V}|10\rangle = \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \langle 10| \left(\hat{a}_x\hat{a}_y + \hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger\right) |10\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 10|\sqrt{1}\sqrt{0}|0,-1\rangle + \langle 10|\sqrt{1}\sqrt{1}|01\rangle\right)\\
&+ \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 10|\sqrt{2}\sqrt{0}|2,-1\rangle + \langle 10|\sqrt{2}\sqrt{1}|21\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 10|01\rangle + \sqrt{2}\langle 10|21\rangle\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle 01|\hat{V}|01\rangle &= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\langle 01|\left(\hat{a}_x\hat{a}_y + \hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger\right)|01\rangle\\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 01|\sqrt{0}\sqrt{1}|-10\rangle + \langle 01|\sqrt{0}\sqrt{2}|-12\rangle\right)\\
&+ \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 01|\sqrt{1}\sqrt{1}|10\rangle + \langle 01|\sqrt{1}\sqrt{2}|12\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 01|10\rangle + \sqrt{2}\langle 01|12\rangle\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle 10|\hat{V}|01\rangle &= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\langle 10|\left(\hat{a}_x\hat{a}_y + \hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger\right)|01\rangle\\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 10|\sqrt{0}\sqrt{1}|-10\rangle + \langle 10|\sqrt{0}\sqrt{2}|-12\rangle\right)\\
&+ \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 10|\sqrt{1}\sqrt{1}|10\rangle + \langle 10|\sqrt{1}\sqrt{2}|12\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 10|10\rangle + \sqrt{2}\langle 10|12\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle 01|\hat{V}|10\rangle &= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\langle 01|\left(\hat{a}_x\hat{a}_y + \hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger\right)|10\rangle\\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 01|\sqrt{1}\sqrt{0}|0,-1\rangle + \langle 01|\sqrt{1}\sqrt{1}|01\rangle\right)\\
&+ \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 01|\sqrt{2}\sqrt{0}|2,-1\rangle + \langle 01|\sqrt{2}\sqrt{1}|21\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\left(\langle 01|01\rangle + \sqrt{2}\langle 01|21\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega
\end{aligned}
$$

Und erhalten mit diesen für $\hat{\hat{V}}$:

$$
\hat{\hat{V}} = \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Es gilt für die 1. Ordnung Störungstheorie:

$$\sum_{j=1}^{g} \left(\langle m_i^{(0)} | \hat{V} | m_j^{(0)} \rangle - E_n^{(1)} \delta_{ij} \right) \langle m_j^{(0)} | n^{(0)} \rangle, \tag{1}$$

woraus wir die g unbekannten Koeffizienten $\langle m_j^{(0)} | n^{(0)} \rangle$ bestimmen können. Zuvor benötigen wir jedoch die Energieverschiebung $E_n^{(1)}$. Um diese Energieverschiebung erster Ordnung zu bestimmen, müssen wir folgende Determinante berechnen:

$$\det\left(\hat{\hat{V}} - E_n^{(1)} Id\right) = \det\begin{pmatrix} -E_n^{(1)} & \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \\ \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega & -E_n^{(1)} \end{pmatrix} = \left(E_n^{(1)}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\gamma\hbar\omega\right)^2 = 0,$$

wobei Id die Einheitsmatrix darstellt. Wir erhalten also für die Energieverschiebung $E_n^{(1)}$:

$$\Delta E_{\pm}^{(1)} = \pm\frac{1}{2}\gamma\hbar\omega.$$

Mit dieser können wir nun die $\langle m_j^{(0)} | n^{(0)} \rangle$ bestimmen indem wir einsetzen in (1), wobei wir die Fälle $\pm$ unterscheiden können:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle 10|+\rangle \\ \langle 01|+\rangle \end{pmatrix} &= 0 \\ \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle 10|-\rangle \\ \langle 01|-\rangle \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten für den + Fall:

$$\langle 10|+\rangle = \langle 01|+\rangle$$

Für den − Fall erhalten wir:

$$\langle 10|-\rangle = -\langle 01|-\rangle$$

Für die Eigenkets gilt:

$$|n^{(0)}\rangle = \sum_{j=1}^{g} \langle m_j^{(0)} | n^{(0)} \rangle | m_j^{(0)} \rangle,$$

also für unsere Fälle:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \langle 10|+\rangle|10\rangle + \langle 01|+\rangle|01\rangle = \langle 10|+\rangle\left(|10\rangle + |01\rangle\right) \\ |-\rangle &= \langle 10|-\rangle|10\rangle + \langle 01|-\rangle|01\rangle = \langle 10|-\rangle\left(|10\rangle - |01\rangle\right) \end{aligned}$$

Wir können nun noch normieren, indem wir $\langle +|+\rangle = 1$ bzw. $\langle -|-\rangle = 1$ betrachten:

$$1 = \langle +|+\rangle = |\langle 10|+\rangle|^2 \langle 10|10\rangle + |\langle 01|+\rangle|^2 \langle 01|01\rangle = 2 \cdot |\langle 10|+\rangle|^2$$

Umstellen liefert somit:

$$\langle 10|+\rangle = \langle 01|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die Normierung für $-$ liefert:

$$1 = \langle -|-\rangle = |\langle 10|-\rangle|^2 \langle 10|10\rangle + |\langle 01|-\rangle|^2 \langle 01|01\rangle = 2\, |\langle 10|-\rangle|^2$$

d.h. also auch:

$$\langle 10|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \langle 01|-\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Somit folgt für die normierten Eigenkets:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|10\rangle \pm |01\rangle \right).$$

Um mit Aufgabenteil c) vergleichen zu können schreiben wir noch kurz die Energien für die Zustände auf:

$$E_\pm = E_{10} + \Delta E_\pm^{(1)} = 2\hbar\omega \pm \frac{1}{2}\gamma\hbar\omega.$$

c)

Das Problem für $\hat{H}_0 + \hat{V}$ ist exakt zu lösen und mit den Ergebnissen aus b) zu vergleichen.

Für den exakten Ansatz nutzen wir den Hamiltonian:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) + \gamma m\omega^2 \hat{x}\hat{y} \tag{2}$$

Da wir dies auf diese Weise nicht lösen können, versuchen wir durch Koordinatentransformation und somit geschicktes Umformen, auf eine Form zu reduzieren, die wir lösen können. Wir können dies erreichen, indem wir das Problem auf zwei unabhängige harmonischen Oszillatoren, durch Rotation des Koordinatensystems um 45°, zurückführen, wobei diese natürlich andere Schwingungsfrequenzen besitzen als der ursprüngliche gestörte Oszillator. Der Hamiltonian $\hat{H}_0$ ist rotationsinvariant, daher ändert er seine Form bei Drehungen nicht, im Gegensatz zum Potential $\hat{V}$ und wir können auch explizit für 45° drehen wobei wir dann gestrichene Variablen benutzen werden für das gedrehte Koordinatensystem. Wir berechnen die Drehung um 45°:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{pmatrix}$$

Somit folgt also:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{(\hat{x}' - \hat{y}')}{\sqrt{2}} \\ \hat{y} &= \frac{(\hat{x}' + \hat{y}')}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

wobei sich somit das Störpotential schreiben lässt als $\hat{V} = \gamma m\omega^2 \hat{x}\hat{y} = \gamma m\omega^2 \frac{1}{2}\left(\hat{x}'^2 - \hat{y}'^2\right)$.
Einsetzen in (2) liefert uns also:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_{x'}^2}{2m} + \frac{\hat{p}_{y'}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}'^2 + \hat{y}'^2\right) + \frac{1}{2}\gamma m\omega^2\left(\hat{x}'^2 - \hat{y}'^2\right)$$

Umformen ergibt:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_{x'}^2}{2m} + \frac{\hat{p}_{y'}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}'^2(1+\gamma) + \hat{y}'^2(1-\gamma)\right)$$

Wir besitzen also die neuen Frequenzen $\omega_{x'} = \sqrt{1+\gamma}\omega$ und $\omega_{y'} = \sqrt{1-\gamma}\omega$. Dies können wir nun berechnen, wobei wir wie bei Aufgabenteil a) vorgehen können:

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{p}_{x'}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_{x'}^2\hat{x}'^2}_{\hat{H}_{x'}} + \underbrace{\frac{\hat{p}_{y'}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_{y'}^2\hat{y}'^2}_{\hat{H}_{y'}}$$

mit $\hat{H}_{x'} = \hbar\omega_{x'}\left(\hat{N}_{x'} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\sqrt{1+\gamma}\omega\left(\hat{N}_{x'} + \frac{1}{2}\right)$ und $\hat{H}_{y'} = \hbar\omega_{y'}\left(\hat{N}_{y'} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\sqrt{1-\gamma}\omega\left(\hat{N}_{y'} + \frac{1}{2}\right)$ folgt also für den Erwartungswert des Hamiltonian:

$$\begin{aligned}\langle n_{x'}n_{y'}|\hat{H}|n_{x'}n_{y'}\rangle &= \langle n_{x'}n_{y'}|\hat{H}_{x'}|n_{x'}n_{y'}\rangle + \langle n_{x'}n_{y'}|\hat{H}_{y'}|n_{x'}n_{y'}\rangle \\ &= \hbar\omega\left(\sqrt{1+\gamma}\left(n_{x'} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{1-\gamma}\left(n_{y'} + \frac{1}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Dies sind zudem die Eigenenergien. Wir erhalten für den Fall $n_{x'} = 0$, $n_{y'} = 0$ das Ergebnis, wobei wir die Potenzreihenentwicklung der Wurzel mit $\sqrt{1\pm\gamma} = 1 \pm \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{8}\gamma^2 \pm \ldots$ benutzen und Terme höherer Ordnung $O\left(\gamma^2\right)$ vernachlässigen können, da $\gamma \ll 1$:

$$E_{00} = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(1 + \frac{1}{2}\gamma + 1 - \frac{1}{2}\gamma\right) = \hbar\omega,$$

wie im Aufgabenteil b).
Betrachten wir die Fälle 10 und 01, so folgen die Ergebnisse:

$$\begin{aligned}E_{10} &= \hbar\omega\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma\right) = 2\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega\gamma \\ E_{01} &= \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\gamma + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\gamma\right) = 2\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega\gamma\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse sind auch identisch mit denen aus Aufgabenteil b), somit bestätigt die exakte Rechnung also die Ergebnisse der Störungstheorie.

14.2 (Getriebener harmonischer Oszillator)

Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator (Hamiltonian $\hat{H} = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)$), der sich für $t < 0$ im Grundzustand befindet. Für $t > 0$ wirkt eine harmonische Störung

$$\hat{V}(t) = F_0 \hat{x} \cos\omega t$$

mit der Konstanten F_0. Es ist der Erwartungswert $\langle \hat{x} \rangle (t)$ für $t > 0$ mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie in erster nicht-verschwindender Ordnung zu bestimmen und zu klären, was für den Fall $\omega \approx \omega_0$ passiert.

Um den zeitlichen Erwartungswert bestimmen zu können, benötigen wir die zeitliche Entwicklung $|\psi(t)\rangle_\lambda = \sum_k c_{k,\lambda}(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} t\right) |k^{(0)}\rangle$. Für $t < 0$ besitzen wir einen stationären Zustand ohne Störung. Es gilt $c_k^{(0)} = \langle k^{(0)} | i^{(0)} \rangle = \delta_{ki}$. Wir bestimmen zuerst die erste nicht-verschwindene Ordnung der Störungstheorie. Es gilt für die erste Ordnung Störungstheorie:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt'\, V_{ni}(t') \exp(i\omega_{ni} t')$$

Setzen wir explizit unsere Störung ein, erhalten wir:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt'\, F_0 \langle n^{(0)} | \hat{x} | i^{(0)} \rangle \cos\omega t' \exp(i\omega_{ni} t')$$

mit $|i^{(0)}\rangle = |0\rangle$ dem Grundzustandket und $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$ können wir $V_{ni} = \langle n | \hat{x} | 0 \rangle$ explizit bestimmen:

$$\begin{aligned}
\langle n | \hat{x} | 0 \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \left(\langle n | \hat{a} | 0 \rangle + \langle n | \hat{a}^\dagger | 0 \rangle \right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \left(\langle n | 0 | -1 \rangle + \langle n | 1 | 1 \rangle \right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \delta_{n1}
\end{aligned}$$

setzen wir dies in $c_n^{(1)}(t)$ ein und nutzen $\omega_{ni} = \frac{1}{\hbar}\left(E_n^{(0)} - E_i^{(0)}\right) = \frac{1}{\hbar}(E_n - E_0) = \omega_{n0}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
c_n^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} F_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \int_0^t dt'\, \delta_{n1} \cos\omega t' \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_n - E_0) t'\right) \\
&= -\frac{i}{\hbar} F_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \delta_{n1} \int_0^t dt'\, \cos\omega t' \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0) t'\right)
\end{aligned}$$

Mit der Energie des harmonischen Oszillators von $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$ (aus dem Hamiltonian aus der Aufgabenstellung) folgt für $(E_1 - E_0) = \frac{3}{2}\hbar\omega_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 = \hbar\omega_0$, wobei einsetzen uns ein berechenbares Integral liefert:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\delta_{n1}\int_0^t dt'\ \cos\omega t'\ \exp\left(i\omega_0 t'\right)$$

Wir können die Eulersche Identität benutzen mit $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)\right)$ folgt:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{2\hbar}F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\delta_{n1}\int_0^t dt'\ \left(\exp\left(i\left(\omega_0+\omega\right)t'\right) + \exp\left(i\left(\omega_0-\omega\right)t'\right)\right),$$

Dieses Integral ist leicht zu berechnen:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{2\hbar}F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}{}_0^t$$

Setzen wir die Grenzen ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
c_n^{(1)}(t) &= -\frac{1}{2\hbar}F_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\delta_{n1}\left(\frac{\exp\left(i\left(\omega_0+\omega\right)t\right)-1}{\left(\omega_0+\omega\right)} + \frac{\exp\left(i\left(\omega_0-\omega\right)t\right)-1}{\left(\omega_0-\omega\right)}\right) \\
&= \delta_{n1}\sqrt{\frac{F_0^2}{8m\hbar\omega_0}}\left(\frac{1-\exp\left(i\left(\omega_0+\omega\right)t\right)}{\left(\omega_0+\omega\right)} + \frac{1-\exp\left(i\left(\omega_0-\omega\right)t\right)}{\left(\omega_0-\omega\right)}\right) \\
&= \delta_{n1}\sqrt{\frac{F_0^2}{8m\hbar\omega_0}}\left(\frac{\left(\omega_0-\omega\right)\left(1-\exp\left(i\left(\omega_0+\omega\right)t\right)\right) + \left(\omega_0+\omega\right)\left(1-\exp\left(i\left(\omega_0-\omega\right)t\right)\right)}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \\
&= \delta_{n1}\sqrt{\frac{F_0^2}{8m\hbar\omega_0}}\left(\frac{2\omega_0 + \left(\omega-\omega_0\right)\exp\left(i\left(\omega_0+\omega\right)t\right) - \left(\omega_0+\omega\right)\exp\left(i\left(\omega_0-\omega\right)t\right)}{\omega_0^2-\omega^2}\right)
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit für $|\psi(t)\rangle$, wobei wir nur die erste nicht-verschwindende Ordnung betrachten:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \delta_{ki}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_k^{(0)}t\right)|k^{(0)}\rangle + \delta_{k1}c_k^{(1)}(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_k^{(0)}t\right)|k^{(0)}\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0^{(0)}t\right)|0\rangle + c_k^{(1)}(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1^{(0)}t\right)|1\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_0 t\right)|0\rangle + c_k^{(1)}(t)\exp\left(-i\frac{3}{2}\omega_0 t\right)|1\rangle
\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert von $\hat{x}$ ergibt sich somit:

$$\langle\hat{x}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle$$

mit $\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_0 t\right) = a$ und $c_k^{(1)}(t)\exp\left(-i\frac{3}{2}\omega_0 t\right) = b$ und $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) = d\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle &= \left(a^*\langle 0| + b^*\langle 1|\right) d\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\left(a|0\rangle + b|1\rangle\right) \\
&= d\left(a^*\langle 0| + b^*\langle 1|\right)\left[\left(a\hat{a}|0\rangle + b\hat{a}|1\rangle\right) + \left(a\hat{a}^\dagger|0\rangle + b\hat{a}^\dagger|1\rangle\right)\right] \\
&= d\left(a^*\langle 0| + b^*\langle 1|\right)\left[\left(a0|-1\rangle + b|0\rangle\right) + \left(a|1\rangle + b2|2\rangle\right)\right] \\
&= d\left(a^* b\langle 0|0\rangle + b^* a\langle 1|1\rangle\right) \\
&= da^*b + db^*a.
\end{aligned}$$

Dies können wir auch explizit ausschreiben, wobei wir somit erhalten:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\exp\left(\frac{i}{2}\omega_0 t\right)c_k^{(1)}(t)\exp\left(-i\frac{3}{2}\omega_0 t\right) + c_k^{(1)*}(t)\exp\left(i\frac{3}{2}\omega_0 t\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\omega_0 t\right)\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(c_k^{(1)}(t)\exp\left(-i\omega_0 t\right) + c_k^{(1)*}(t)\exp\left(i\omega_0 t\right)\right) \\
&= \frac{F_0}{4m\omega_0}\left(\frac{2\omega_0\exp\left(-i\omega_0 t\right) + \left(\omega-\omega_0\right)\exp\left(i\omega t\right) - \left(\omega_0+\omega\right)\exp\left(-i\omega t\right)}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \\
&+ \frac{F_0}{4m\omega_0}\left(\frac{2\omega_0\exp\left(i\omega_0 t\right) + \left(\omega-\omega_0\right)\exp\left(-i\omega t\right) - \left(\omega_0+\omega\right)\exp\left(i\omega t\right)}{\omega_0^2-\omega^2}\right) \\
&= \frac{F_0}{4m\omega_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(2\omega_0\left[\exp\left(-i\omega_0 t\right)+\exp\left(i\omega_0 t\right)\right] - 2\omega_0\left[\exp\left(i\omega t\right)+\exp\left(-i\omega t\right)\right]\right) \\
&= \frac{F_0}{m}\frac{\left(\cos\omega_0 t - \cos\omega t\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}.
\end{aligned}$$

Es bleibt nun noch der Fall zu betrachten, für den $\omega \approx \omega_0$:

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\langle\hat{x}\rangle(t) = \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{F_0}{m}\frac{\left(\cos\omega_0 t - \cos\omega t\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}.$$

Wir können den Satz von L'Hospital verwenden ($\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$) somit folgt:

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\langle\hat{x}\rangle(t) = \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{F_0}{m}\frac{t\sin\omega t}{(-2\omega)},$$

Es folgt also für $\omega \approx \omega_0$:

$$\langle\hat{x}\rangle(t) = -\frac{F_0}{2m}\frac{\sin\left(\omega_0 t\right)}{\omega_0}\cdot t.$$

Für den Fall $\omega_0 \to 0$, kennen wir auch den Grenzwert mit $\lim_{x\to 0}\frac{\sin tx}{x} = t$ folgt:

$$\langle\hat{x}\rangle(t) = -\frac{F_0}{2m}\cdot t^2.$$