Heiko Dumlich, Max Hoffmann 6. Januar 2007

10 Übungsblatt Theoretische Physik IV

10.1 (Clebsch-Gordan-Koeffizienten)

Es sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\langle ls; m_l m_s | jm\rangle$ für ein Elektron mit Bahndrehimpuls l und Spin $s = \frac{1}{2}$ zu bestimmen, wobei die globale Phase durch:

$$\langle l\frac{1}{2}; l\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2}\, l+\frac{1}{2}\rangle = 1,$$

bestimmt ist.

Es gilt die Relation:

$$\hat{J}_\pm |j_1 j_2; jm\rangle = \left(\hat{J}_{1\pm} + \hat{J}_{2\pm}\right) \sum_{m_1', m_2'} |j_1 j_2; m_1' m_2'\rangle \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; jm\rangle,$$

wobei wir nur eine Identität eingeschoben haben mit $\sum_{m_1', m_2'} |j_1 j_2; m_1' m_2'\rangle\langle j_1 j_2; m_1' m_2'| = 1$. Nun folgt nach Anwendung der Operatoren:

$$\begin{gathered}\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j_1 j_2; jm \pm 1\rangle \\ = \\ \sqrt{(j_1 \mp m_1')(j_1 \pm m_1' + 1)} \textstyle\sum_{m_1', m_2'} |j_1 j_2; m_1' \pm 1, m_2'\rangle \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; jm\rangle \\ + \\ \sqrt{(j_1 \mp m_2')(j_1 \pm m_2' + 1)} \textstyle\sum_{m_1', m_2'} |j_1 j_2; m_1' m_2' \pm 1\rangle \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; jm\rangle\end{gathered}$$

Multiplikation mit $\langle j_1 j_2; m_1 m_2|$, liefert:

$$\begin{gathered}\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; jm \pm 1\rangle \\ = \\ \sqrt{(j_1 \mp m_1')(j_1 \pm m_1' + 1)} \textstyle\sum_{m_1', m_2'} \delta_{m_2, m_2'} \delta_{m_1 m_1' \pm 1} \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; jm\rangle \\ + \\ \sqrt{(j_1 \mp m_2')(j_1 \pm m_2' + 1)} \textstyle\sum_{m_1', m_2'} \delta_{m_1, m_1'} \delta_{m_2 m_2' \pm 1} \langle j_1 j_2; m_1' m_2' | j_1 j_2; jm\rangle\end{gathered}$$

Wir führen dies aus, indem wir $m_1' = m_1 \mp 1$, bzw. $m_2' = m_2$ ersetzen für den ersten Term und äquivalent $m_2' = m_2 \mp 1$ bzw. $m_1' = m_1$ für den zweiten Term. Somit gilt für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten die Rekursions-Relation:

$$\begin{aligned}\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j, m \pm 1\rangle &= \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}\langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2; jm\rangle \\ &+ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}\langle j_1 j_2; m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2; jm\rangle\end{aligned}$$

für unseren Fall, folgt also:

$$\begin{aligned}\sqrt{(j \mp m)\,(j \pm m + 1)}\langle ls; m_l m_s | j, m \pm 1\rangle &= \sqrt{(l \mp m_l + 1)\,(l \pm m_l)}\langle ls; m_l \mp 1, m_s | jm\rangle \\ &+ \sqrt{(s \mp m_s + 1)\,(s \pm m_s)}\langle ls; m_l, m_s \mp 1 | jm\rangle.\end{aligned}$$

Setzen wir nun noch $m = m \mp 1$, so folgt:

$$\begin{aligned}\sqrt{(j \mp m + 1)\,(j \pm m)}\langle ls; m_l m_s | j, m\rangle &= \sqrt{(l \mp m_l + 1)\,(l \pm m_l)}\langle ls; m_l \mp 1, m_s | jm \mp 1\rangle \\ &+ \sqrt{(s \mp m_s + 1)\,(s \pm m_s)}\langle ls; m_l, m_s \mp 1 | jm \mp 1\rangle.\end{aligned}$$

wobei $j_1 = l \,\mathrm{mit}\, l \in \mathbb{Z}$, $j_2 = s = \frac{1}{2}$, $m_1 = m_l$, $m_2 = m_s = \pm\frac{1}{2}$, $m = m_l + m_s = m_l \pm \frac{1}{2}$ und $j = l \pm \frac{1}{2}$. Die j's besitzen also für jedes l zwei Werte. Betrachten wir $j = l + \frac{1}{2}$, $m_s = \frac{1}{2}$ und $m_l = m - \frac{1}{2}$, somit folgt, wenn wir unsere Rekursionsrelation benutzen (wobei wir die Terme von $\hat{J}_-$ verwenden):

$$\begin{gathered}\sqrt{\left(l + \tfrac{1}{2} + m + 1\right)\,\left(l + \tfrac{1}{2} - m\right)}\langle m - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} | l + \tfrac{1}{2}, m\rangle \\ = \\ \sqrt{\left(l + m - \tfrac{1}{2} + 1\right)\,\left(l - m + \tfrac{1}{2}\right)}\langle m - \tfrac{1}{2} + 1, \tfrac{1}{2} | l + \tfrac{1}{2}, m + 1\rangle \\ + \\ \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1\right)\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)}_{=0}}\langle m - \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} | l + \tfrac{1}{2}, m + 1\rangle,\end{gathered}$$

dies liefert also:

$$\sqrt{\left(l + m + \frac{3}{2}\right)\left(l - m + \frac{1}{2}\right)}\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\left(l + m + \frac{1}{2}\right)\left(l - m + \frac{1}{2}\right)}\langle m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m + 1\rangle,$$

umstellen liefert:

$$\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{\left(l + m + \frac{1}{2}\right)}{\left(l + m + \frac{3}{2}\right)}}\langle m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m + 1\rangle,$$

aus der Rekursionsrelation. Wir können nun weitergehen und $m + 2$ betrachten, indem wir in die obere Relation $m = m + 1$ einsetzen:

$$\langle m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m + 1\rangle = \sqrt{\frac{\left(l + m + \frac{3}{2}\right)}{\left(l + m + \frac{5}{2}\right)}}\langle m + \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | l + \frac{1}{2}, m + 2\rangle,$$

in Bezug zu m liefert dies:

$$\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})}{(l+m+\frac{5}{2})}}\langle m+\frac{3}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m+2\rangle,$$

Für $m+3$ folgt:

$$\langle m+\frac{3}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m+2\rangle = \sqrt{\frac{(l+m+\frac{5}{2})}{(l+m+\frac{7}{2})}}\langle m+\frac{5}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m+3\rangle$$

bzw.

$$\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})}{(l+m+\frac{7}{2})}}\langle m+\frac{5}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m+3\rangle,$$

dies können wir nun durchführen bis wir den maximal möglichen Wert $m_l = l$ erreichen (indem wir auf der rechten Seite $m = l - \frac{1}{2}$ einsetzen und nur in den Nenner das m ersetzen, dies erkennt man schnell, wenn man oben hinschaut und sieht, dass sich die Nenner immer mit dem nachfolgenden Zähler wegheben und nur der "letzte Nenner" überlebt):

$$\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})}{(2l+1)}}\langle l,\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}\rangle.$$

Nun können wir unsere Phasenbeziehung nutzen und erhalten:

$$\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})}{(2l+1)}}.$$

Dies ist der erste Clebsch-Gordan-Koeffizient. Aus der Definition:

$$|j_1 j_2; jm\rangle = \sum_{m_1', m_2'} |j_1 j_2; m_1' m_2'\rangle\langle j_1 j_2; m_1' m_2'|j_1 j_2; jm\rangle$$

wissen wir jedoch, da wir über m_s und m_l summieren müssen und deren Summe $m_s + m_l = m$ liefern muss, dass bei festem $j = l \pm \frac{1}{2}$ die Summe nur aus 2 Termen bestehen. Die Gleichungen für die ursprünglichen Kets in den basistransformierten lauten somit:

$$\begin{aligned}
|l+\frac{1}{2},m\rangle &= |m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m\rangle + |m+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\langle m+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m\rangle \\
|l-\frac{1}{2},m\rangle &= |m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l-\frac{1}{2},m\rangle + |m+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\langle m+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|l-\frac{1}{2},m\rangle,
\end{aligned}$$

wobei wir bereits den Koeffizienten für $|m_l - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ bestimmt haben. Die Matrix der CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten muss eine unitäre Matrix bilden. Diese Eigenschaft haben nur Drehmatrizen, also Abbildungen der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Der bestimmte Koeffizient steht hier für einen $\cos\alpha$ Eintrag. Die restlichen Einträge können wir daher über die EULERsche Identität

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

bestimmen.

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha &\stackrel{!}{=} 1 - \cos^2\alpha \\ &= \frac{2l+1}{2l+1} - \frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1} \\ &= \frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1} \end{aligned}$$

Somit lautet die Matrix der CG-Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \\ -\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|l+\frac{1}{2}, m\rangle & \langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2}, m\rangle \\ \langle m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}|l-\frac{1}{2}, m\rangle & \langle m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|l-\frac{1}{2}, m\rangle \end{pmatrix}.$$

10.2 (Irreduzible Tensoroperatoren)

Für einen Operator $\hat{A}$ sei folgende Operatorfunktion definiert:

$$\hat{\mathbf{J}}^2\left\{\hat{A}\right\} \equiv \left[\hat{J}_x, \left[\hat{J}_x, \hat{A}\right]\right] + \left[\hat{J}_y, \left[\hat{J}_y, \hat{A}\right]\right] + \left[\hat{J}_z, \left[\hat{J}_z, \hat{A}\right]\right]. \tag{1}$$

Es ist zu zeigen, dass für die q-te Komponente $\hat{T}_q^{(k)}$ eines irreduziblen Tensoroperators $\hat{T}^{(k)}$ vom Rang k gilt:

$$\hat{\mathbf{J}}^2\left\{\hat{T}_q^{(k)}\right\} = \hbar^2\, k\,(k+1)\,\hat{T}_q^{(k)}.$$

Es gelten die folgenden nützlichen Beziehungen:

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y \quad \text{und} \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y,$$

hieraus folgen:

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right) \quad \text{und} \quad \hat{J}_y = \frac{1}{2i}\left(\hat{J}_+ - \hat{J}_-\right),$$

durch umstellen. Zudem gelten die Beziehung:

$$\left[\hat{J}_{\pm}, \hat{T}_q^{(k)}\right] = \hbar\sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\hat{T}_{q\pm 1}^{(k)},$$

und

$$\left[\hat{J}_z, \hat{T}_q^{(k)}\right] = \hbar q \hat{T}_q^{(k)}.$$

Wenn wir den irreduziblen Tensoroperator in (1) einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^2\left\{\hat{T}_q^{(k)}\right\} &= \left[\hat{J}_x, \left[\hat{J}_x, \hat{T}_q^{(k)}\right]\right] + \left[\hat{J}_y, \left[\hat{J}_y, \hat{T}_q^{(k)}\right]\right] + \left[\hat{J}_z, \left[\hat{J}_z, \hat{T}_q^{(k)}\right]\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right), \left[\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right), \hat{T}_q^{(k)}\right]\right] - \frac{1}{4}\left[\left(\hat{J}_+ - \hat{J}_-\right), \left[\left(\hat{J}_+ - \hat{J}_-\right), \hat{T}_q^{(k)}\right]\right] \\
&+ \hbar q\left[\hat{J}_z, \hat{T}_q^{(k)}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right), \left\{\left[\hat{J}_+, \hat{T}_q^{(k)}\right] + \left[\hat{J}_-, \hat{T}_q^{(k)}\right]\right\}\right] \\
&- \frac{1}{4}\left[\left(\hat{J}_+ - \hat{J}_-\right), \left\{\left[\hat{J}_+, \hat{T}_q^{(k)}\right] - \left[\hat{J}_-, \hat{T}_q^{(k)}\right]\right\}\right] + \hbar^2 q^2 \hat{T}_q^{(k)} \\
&= \frac{\hbar}{4}\sqrt{(k-q)(k+q+1)}\left[\hat{J}_+, \hat{T}_{q+1}^{(k)}\right] + \frac{\hbar}{4}\sqrt{(k+q)(k-q+1)}\left[\hat{J}_+, \hat{T}_{q-1}^{(k)}\right] \\
&+ \frac{\hbar}{4}\sqrt{(k-q)(k+q+1)}\left[\hat{J}_-, \hat{T}_{q+1}^{(k)}\right] + \frac{\hbar}{4}\sqrt{(k+q)(k-q+1)}\left[\hat{J}_-, \hat{T}_{q-1}^{(k)}\right] \\
&+ \frac{(-\hbar)}{4}\sqrt{(k-q)(k+q+1)}\left[\hat{J}_+, \hat{T}_{q+1}^{(k)}\right] + \frac{\hbar}{4}\sqrt{(k+q)(k-q+1)}\left[\hat{J}_+, \hat{T}_{q-1}^{(k)}\right] \\
&+ \frac{\hbar}{4}\sqrt{(k-q)(k+q+1)}\left[\hat{J}_-, \hat{T}_{q+1}^{(k)}\right] - \frac{\hbar}{4}\sqrt{(k+q)(k-q+1)}\left[\hat{J}_-, \hat{T}_{q-1}^{(k)}\right] \\
&+ \hbar^2 q^2 \hat{T}_q^{(k)} \\
&= 2\cdot\frac{\hbar}{4}\sqrt{(k-q)(k+q+1)}\left[\hat{J}_-, \hat{T}_{q+1}^{(k)}\right] + \frac{\hbar}{2}\sqrt{(k+q)(k-q+1)}\left[\hat{J}_+, \hat{T}_{q-1}^{(k)}\right] + \hbar^2 q^2 \hat{T}_q^{(k)} \\
&= \frac{\hbar}{2}\sqrt{(k-q)(k+q+1)}\hbar\sqrt{(k+q+1)(k-q)}\hat{T}_q^{(k)} \\
&+ \frac{\hbar}{2}\sqrt{(k+q)(k-q+1)}\hbar\sqrt{(k-q+1)(k+q)}\hat{T}_q^{(k)} + \hbar^2 q^2 \hat{T}_q^{(k)} \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left[(k-q)(k+q+1) + (k+q)(k-q+1) + 2q^2\right]\hat{T}_q^{(k)} \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left[\left(k^2 + kq + k - kq - q^2 - q\right) + \left(k^2 - kq + k + kq - q^2 + q\right) + 2q^2\right]\hat{T}_q^{(k)} \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\left[2k^2 + 2k\right]\hat{T}_q^{(k)} \\
&= \hbar^2 k(k+1)\hat{T}_q^{(k)}.
\end{aligned}$$

□

10.3 (Projektions-Theorem)

Es sei $\hat{K}_i$ die i-te Komponente eines Vektoroperators und $\hat{\mathbf{J}}$ der Operator des Gesamtdrehimpulses mit Eigenkets $|jm\rangle$ von $\hat{\mathbf{J}}^2$ und $\hat{J}_z = \hat{J}_3$. Zu zeigen ist, dass

$$\langle jm|\hat{K}_i|jm'\rangle = \langle jm|\hat{J}_i|jm'\rangle \frac{\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle}{\hbar^2 j\,(j+1)}$$

mit $\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^{3} \hat{J}_i \hat{K}_i$ gilt.

Wir können ausnutzen, dass wir den Erwartungswert für $\hat{\mathbf{J}}^2$ kennen:

$$\langle jm|\hat{\mathbf{J}}^2|jm\rangle = \hbar^2 j\,(j+1)\,.$$

Setzen wir diesen in die zu zeigende Gleichung ein, vereinfacht sich diese zu:

$$\frac{\langle jm|\hat{K}_i|jm'\rangle}{\langle jm|\hat{J}_i|jm'\rangle} = \frac{\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle}{\langle jm|\hat{\mathbf{J}}^2|jm\rangle}. \tag{2}$$

Betrachten wir nun den Zähler des Bruchs der rechten Seite:

$$\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle = \langle jm|\sum_{i=1}^{3} \hat{J}_i \hat{K}_i|jm\rangle.$$

Ausnutzen von $\hat{J}_\pm = \left(\hat{J}_x \pm i\hat{J}_y\right) = \left(\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2\right)$ und $\hat{J}_z = \hat{J}_3$, ermöglicht uns die x- und y-Komponente des Operators auszudrücken mit:

$$\begin{aligned} \hat{J}_x &= \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right) \\ \hat{J}_y &= -\frac{i}{2}\left(\hat{J}_+ - \hat{J}_-\right). \end{aligned}$$

Wir können nun ausnutzen das die Komponenten von $\hat{\mathbf{J}}$ und $\hat{\mathbf{K}}$ wegen $\left[\hat{J}_i, \hat{K}_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{K}_k$ vertauschen. Somit gilt also $\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^{3} \hat{J}_i \hat{K}_i = \sum_{i=1}^{3} \hat{K}_i \hat{J}_i$. Die Anwendung der Operatoren liefert $\hat{J}_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle$, bzw. $\hat{J}_\pm|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)\,(j \pm m + 1)}|jm\rangle$.

Setzen wir dies ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle jm|\sum_{i=1}^{3} \hat{J}_i \hat{K}_i|jm\rangle &= \langle jm|\sum_{i=1}^{3} \hat{K}_i \hat{J}_i|jm\rangle \\ &+ \langle jm|\frac{1}{2}\hat{K}_1\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right)|jm\rangle \\ &+ \langle jm|\frac{i}{2}\hat{K}_2\left(-\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right)|jm\rangle \\ &+ \langle jm|\hat{K}_3 \hat{J}_z|jm\rangle \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir also mit $c_\pm = \sqrt{(j \mp m)\,(j \pm m + 1)}$:

$$\begin{aligned}
\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle &= \frac{\hbar}{2} c_+ \langle jm|\hat{K}_1|jm+1\rangle + \frac{\hbar}{2} c_- \langle jm|\hat{K}_1|jm-1\rangle \\
&+ \frac{(-i\hbar)}{2} c_+ \langle jm|\hat{K}_2|jm+1\rangle + \frac{i\hbar}{2} c_- \langle jm|\hat{K}_2|jm-1\rangle \\
&+ m\hbar\langle jm|\hat{K}_3|jm\rangle.
\end{aligned}$$

Dies können wir auch zusammenfassen zu:

$$\begin{aligned}
\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle &= \frac{\hbar}{2} c_+ \langle jm|\hat{K}_1 - i\hat{K}_2|jm+1\rangle + \frac{\hbar}{2} c_- \langle jm|\hat{K}_1 + i\hat{K}_2|jm-1\rangle \\
&+ m\hbar\langle jm|\hat{K}_3|jm\rangle.
\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Vektoroperatorkomponenten auch in der sphärischen Form als $\hat{U}_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{U}_1 \pm i\hat{U}_2\right)$ und $\hat{U}_0 = \hat{U}_z$ geschrieben werden können, somit ergibt sich also, da $\hat{\mathbf{K}}$ ein Vektoroperator ist:

$$\begin{aligned}
\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle &= \frac{\hbar}{2} c_+ \langle jm|\sqrt{2}\hat{K}_{-1}|jm+1\rangle + \frac{\hbar}{2} c_- \langle jm|\left(-\sqrt{2}\right)\hat{K}_{+1}|jm-1\rangle \\
&+ m\hbar\langle jm|\hat{K}_0|jm\rangle \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} c_+ \langle jm|\hat{K}_{-1}|jm+1\rangle - \frac{\hbar}{\sqrt{2}} c_- \langle jm|\hat{K}_{+1}|jm-1\rangle \\
&+ m\hbar\langle jm|\hat{K}_0|jm\rangle.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems können wir nun auf folgendes schliessen:

$$\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle = c_{jm}\langle jm|\hat{\mathbf{K}}|jm\rangle,$$

wobei c_{jm} nur von j und m abhängt. Die Begründung ergibt sich direkt aus dem Wigner-Eckart-Theorem, da die Betrachtung einer Komponente, d.h. also q, mit Hilfe dieses Theorems unabhängig von der Komponente gemacht werden kann, dieses besagt nämlich:

$$\langle \alpha' j' m'|\hat{T}_q^{(k)}|\alpha jm\rangle = \langle jk; mq|j'm'\rangle \frac{\langle \alpha' j'||\hat{T}^{(k)}||\alpha j\rangle}{\sqrt{2j+1}}.$$

Wir können also diesen Vorfaktor, der sich aus der Summe der drei Komponentenkoeffizienten bildet als c_{jm} schreiben, wobei alle drei Komponenten, mit einem individuellen Koeffizienten, proportional zu dem reduzierten Matrixelement sind. Die Konstante c_{jm} ist unabhängig vom Operator $\hat{\mathbf{K}}$ bzw. allgemein $\hat{T}_q^{(k)}$.

Es ist sinnvoll nun die Eigenschaften eines skalaren Operator zu betrachten, wobei $\hat{T}_0^{(0)} = \hat{S} = \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}$ ($\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}$ ist also auch ein Skalaroperator,[1]):

$$\langle \alpha' j' m' | \hat{S} | \alpha j m \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \frac{\langle \alpha' j' | \hat{S} | \alpha j \rangle}{\sqrt{2j+1}}.$$

Die Eigenschaft dieses skalaren Operators ist das sowohl j als auch m nicht verändert werden. Diese Eigenschaft können wir auch gleich auf die linke Seite unser Gleichung (2) anwenden, womit sich:

$$\frac{\langle jm | \hat{K}_i | jm' \rangle}{\langle jm | \hat{J}_i | jm' \rangle} = \frac{\langle jm | \hat{\mathbf{K}} | jm \rangle}{\langle jm | \hat{\mathbf{J}} | jm \rangle},$$

ergibt. Dies folgt daraus, dass ein Skalaroperator gerade j und m nicht verändert und somit also gleiche Koeffizienten enstehen, welche wir gleich wegkürzen können.

Wir können nun den Skalaroperator im Nenner der rechten Seite von Gleichung (2) betrachten:

$$\begin{aligned}
\langle jm | \hat{\mathbf{J}}^2 | jm \rangle &= \langle jm | \sum_{i=1}^{3} \hat{J}_i \hat{J}_i | jm \rangle \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} c_+ \langle jm | \hat{J}_{-1} | jm+1 \rangle - \frac{\hbar}{\sqrt{2}} c_- \langle jm | \hat{J}_{+1} | jm-1 \rangle \\
&+ m\hbar \langle jm | \hat{J}_0 | jm \rangle. \\
&= c_{jm} \langle jm | \hat{\mathbf{J}} | jm \rangle
\end{aligned}$$

Wir erhalten also genau den gleichen Koeffizienten, nachdem wir Wigner-Eckart angewandt haben. Wir können unsere Erkenntnisse also zusammenfassen, durch einsetzen in Gleichung (2) erhalten wir:

[1] da das Skalarprodukt von $\hat{\mathbf{J}}$ und $\hat{\mathbf{K}}$ invariant unter Rotation ist. Um dies einzusehen, wenden wir den Rotationsoperator für eine infinitesimale Rotation um den Winkel ε und den Einheitsvektor $\mathbf{n}$

$$\hat{D}(R) = \mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n}$$

an.

$$\begin{aligned}
\left(\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}} \right)' &= \hat{D}(R) \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}} \hat{D}^\dagger(R) \\
&= \left(\mathbf{I} - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n} \right) \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}} \left(\mathbf{I} + \frac{i}{\hbar} \varepsilon \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n} \right) \\
&= \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}} + \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n}, \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}} \right] + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2} \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{K}}\, \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n}}_{\in O(\varepsilon^2)}
\end{aligned}$$

Wie oben gesehen vertauschen $\hat{\mathbf{J}}$ und $\hat{\mathbf{K}}$. Also ist das Skalarprodukt invariant unter Rotation und somit ein Skalaroperator.

$$\frac{\langle jm|\hat{K}_i|jm'\rangle}{\langle jm|\hat{J}_i|jm'\rangle} = \frac{\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle}{\langle jm|\hat{\mathbf{J}}^2|jm\rangle} = \frac{c_{jm}\langle jm|\hat{\mathbf{K}}|jm\rangle}{c_{jm}\langle jm|\hat{\mathbf{J}}|jm\rangle} = \frac{\langle jm|\hat{\mathbf{K}}|jm\rangle}{\langle jm|\hat{\mathbf{J}}|jm\rangle}.$$

Wir hatten jedoch schon gezeigt, dass die Terme die ganz links und ganz rechts steht übereinstimmen. Somit ergibt sich also, wenn wir wieder umstellen:

$$\langle jm|\hat{K}_i|jm'\rangle = \langle jm|\hat{J}_i|jm'\rangle \frac{\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle}{\langle jm|\hat{\mathbf{J}}^2|jm\rangle},$$

oder wenn wir den Erwartungswert im Nenner explizit hinschreiben:

$$\langle jm|\hat{K}_i|jm'\rangle = \langle jm|\hat{J}_i|jm'\rangle \frac{\langle jm|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}}|jm\rangle}{\hbar^2 j\,(j+1)}.$$

□