Heiko Dumlich, Max Hoffmann 22. Oktober 2006

1 Übungsblatt Theoretische Physik IV

1.1 (Compton-Effekt)

Wir betrachten den Compton-Effekt. Hierbei wird durch die Streuung von Röntgenstrahlung an einem Elektron eine Streuung beobachtet. Wobei das vorher in ruhe befindliche Elektron einen Stoß erhält und die Wellenlänge der Röntgenstrahlung verändert wird, da ein Energieübertrag stattfindet. Es gelten der Energieerhaltungssatz und der Impulserhaltungssatz :

$$\begin{aligned} E_{photon} + E_{0,elektron} &= E_{photon'} + E_{elektron}, \qquad (1) \\ \vec{p}_{photon} &= \vec{p}_{photon'} + \vec{p}_{elektron}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Hierbei kann der Impuls-Term des Elektrons der auf der linken Seite stehen würde, d.h. vor dem Stoß, weggelassen werden, da das Elektron vor dem Stoß in Ruhe ist und somit $\vec{p}_{0,elektron} = 0$ ist.

Zudem gilt die relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k},$$

hieraus folgt:

$$|\vec{p}|_{photon} = \hbar\left|\vec{k}\right| = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (3)$$

Für das Elektron gilt:

$$E_{0,elektron} = m_0c^2 \quad und \quad E_{elektron} = m_ec^2, \qquad (4)$$

und aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung (relativistische Kinematik) folgt:

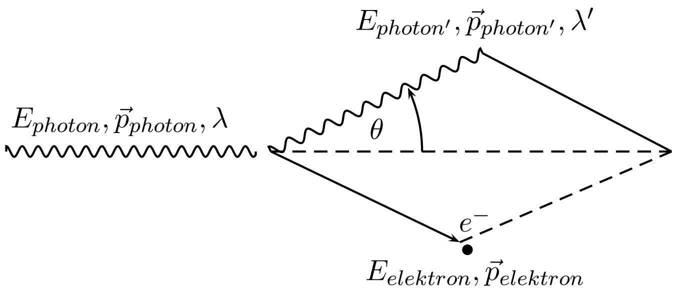
$$E_{elektron} = \sqrt{E_{0,elektron}^2 + \vec{p}_{elektron}^{\,2}c^2} \qquad (5)$$

während für die Energie des Photons die Beziehung ($m_{0,photon} = 0$):

$$E_{photon} = |\vec{p}|_{photon}\, c = \frac{h}{\lambda}c = h\nu = \hbar\omega \qquad (6)$$

gilt.

Betrachten wir nun unsere Zeichnung, so folgt mit dem Kosinussatz:



$$p^2_{elektron} = p^2_{photon} + p^2_{photon'} - 2\, p_{photon}\, p_{photon'} \cdot \cos\theta \tag{7}$$

Wir setzen aus (1) , nachdem wir nach $E_{0,elektron}$ umgestellt haben, und (7) in (5) ein und erhalten:

$$E_{elektron} = \sqrt{\left(E_{photon'} + E_{elektron} - E_{photon}\right)^2 - \left(p^2_{photon} + p^2_{photon'} - 2\, p_{photon}\, p_{photon'} \cdot \cos\theta\right) c^2}.$$

Nun setzen wir die Beziehungen für die Impulse und Energien, die oben dargestellt wurden ein und quadrieren beide Seiten, dies liefert:

$$m_e^2 c^4 = \left(hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) + m_e c^2\right)^2 + \frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}\left(2\cdot\cos\theta - \frac{\lambda'^2 + \lambda^2}{\lambda\lambda'}\right)$$

Wir können nun umformen:

$$\begin{aligned}
m_e^2 c^4 &= \left(\frac{hc}{\lambda\lambda'}\left(\lambda' - \lambda\right) + m_e c^2\right)^2 + \frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}\left(2\cdot\cos\theta - \frac{\lambda'^2 + \lambda^2}{\lambda\lambda'}\right)\\
m_e^2 c^4 &= \left[\left(\frac{hc}{\lambda\lambda'}\right)\left(\lambda' - \lambda\right)\right]^2 + 2\frac{m_e hc^3}{\lambda\lambda'}\left(\lambda' - \lambda\right) + m_e^2c^4 + \frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}\left(2\cdot\cos\theta - \frac{\lambda'^2 + \lambda^2}{\lambda\lambda'}\right)\\
\frac{m_e c}{h}\left(\lambda - \lambda'\right) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\lambda' - \lambda\right)^2 - \lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda\lambda'}\right] + \cos\theta\\
\left(\lambda' - \lambda\right) &= \frac{h}{m_e c}\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\lambda' - \lambda\right)^2 - \lambda^2 - \lambda'^2\right] - \cos\theta\right)\\
\left(\lambda' - \lambda\right) &= \frac{h}{m_e c}\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(-2\lambda\lambda'\right)}{\lambda\lambda'} - \cos\theta\right)\\
\left(\lambda' - \lambda\right) &= \frac{h}{m_e c}\left(1 - \cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Mit $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ der Compton-Wellenlänge folgt somit die gesuchte Abhängigkeit vom Streuwinkel:

$$\Delta\lambda = \left(\lambda' - \lambda\right) = \lambda_c \left(1 - \cos\theta\right)$$

1.2 (Bohrsches Atommodell)

Wir betrachten die klassische Bewegung eines Elektrons mit der Ladung $-e$ im Feld eines Proton mit der Ladung $+e$ (Wasserstoff-Atom). Mit den Bohrschen Atommodell sind die Annahmen verbunden, dass ein Elektron sich auf Kreisbahnen bewegt und dass der Drehimpuls nur die diskreten Werte $L = n\hbar$ annehmen kann.

a)

Es gilt:

$$E = V + T \tag{8}$$

Für die potentielle Energie, die das sich bewegende Elektron in Radialrichtung spürt, erhalten wir hauptsächlich das Coulombpotential, welches durch das Proton erzeugt wird. (z.B. ist die Gravitationskraft zwischen der Masse des Protons und der des Elektrons vernachlässigbar klein gegenüber der elektrostatischen Anziehung des Coulombpotentials.) Für das Coulombpotential gilt:

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

während die kinetische Energie in Polarkoordinaten:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2,$$

mit $L = mr^2\dot{\varphi}$ beträgt.
Einsetzen in (8) liefert:

$$E = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2r^4\dot{\varphi}^2}{mr^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}$$

Es folgt also, da das Problem radialsymmetrisch ist, für das effektive Potential in radialer Richtung:

$$V_{eff} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}.$$

Die Annahme, dass L nur diskrete Werte annehmen kann, führt zum Ergebnis:

$$V_{eff} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2}\frac{n^2\hbar^2}{mr^2}.$$

b)

Es sind die Energien E_n, die Bahnradien r_n und die Geschwindigkeiten v_n zu bestimmen, die das Elektron besitzen kann. Hierzu benutzen wir die Bedingung aus dem Bohrschen Atommodell:

$$L = n\hbar \Leftrightarrow mvr = n\hbar \Leftrightarrow 2\pi r = n\lambda. \tag{9}$$

Zudem bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn, somit folgt also das Kräftegleichgewicht der anziehenden Coulombkraft und der abstoßenden Zentrifugalkraft:

$$\begin{aligned} F_C &= -F_z \quad (10) \\ -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= -m\frac{v^2}{r} \quad (11) \end{aligned}$$

Umstellen von (11) liefert:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} = r, \tag{12}$$

wobei aus (9) nach umstellen $\left(v = \frac{n\hbar}{mr}\right)$ eingesetzt werden kann:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m \frac{n^2\hbar^2}{m^2 r^2}} = r \Leftrightarrow r_n = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}\frac{n^2\hbar^2}{m}. \tag{13}$$

Für die Geschwindigkeit können wir nun (12) umstellen, aus (9) einsetzen und erhalten:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} = \frac{n\hbar}{mv} \Leftrightarrow v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{n\hbar}. \tag{14}$$

Es gilt die potentielle Energie für das Coulombpotential:

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r},$$

während für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r},$$

gilt. Die Gesamtenergie folgt mit:

$$E = T + V = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r},$$

wir können noch r aus (13) einsetzen und erhalten:

$$E_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_n} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{m}{n^2\hbar^2}.$$

Die Ergebnisse für das Elektron sind durch:

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m}{n^2\hbar^2}, \\ r_n &= \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}\frac{n^2\hbar^2}{m}, \\ v_n &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{n\hbar}, \end{aligned}$$

gegeben.

c)

Nach der Annahme Bohrs kann nur Strahlung der Frequenz

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2} \ (n_1 > n_2)$$

emittiert werden. Wir vergleichen ω für $n_1 = n + 1$ und $n_2 = n$ für den Grenzfall $n \to \infty$ mit der klassischen Kreisfrequenz.

Es folgt:

$$\omega = \frac{m}{2\hbar^3} \cdot \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

wobei

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2}.$$

Dieser Term verhält sich für große n also wie

$$\omega = \frac{e^4 m}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3}\frac{2}{n^3}.$$

Für die klassische Kreisfrequenz gilt:

$$\omega_{klassisch} = \frac{v}{r},$$

setzen wir nun (13) und (14) ein, so folgt:

$$\omega_{klassisch} = \frac{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{n\hbar}}{\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}\frac{n^2\hbar^2}{m}} = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^3}\frac{1}{n^3} = \frac{e^4 m}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^3}\frac{2}{n^3}.$$

Wir finden also im Vergleich für große n dass der klassische Fall ein gleiches Ergebnis liefert. Dies nennt man Korrespondenzprinzip, da die klassische Darstellung den Grenzfall der Quantenmechanik darstellt, die alte Theorie (klassisch) ist also ein Teil der neuen Theorie.

d)

Die Larmor-Formel:

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}a^2,$$

gilt für die abgestrahlte Leistung einer beschleunigten Ladung e. Wir berechnen die Energie pro Zeiteinheit, die ein Elektron auf einer Bohrschen Kreisbahn im klassischen Bild verlieren würde. Bei der Bewegung auf einer Kreisbahn, bewirkt die Kraft eine Beschleunigung von

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Einsetzen von (13) und (14) in die Larmor-Formel liefert:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{e^8}{4^4\pi^4\varepsilon_0^4 n^4\hbar^4}\frac{e^4 m^2}{4^2\pi^2\varepsilon_0^2 n^4\hbar^4} \\ &= \frac{2}{3}\frac{e^{14}m^2}{4^7\pi^7\varepsilon_0^7 n^8\hbar^8 c^3}. \end{aligned}$$

Die Dauer der Energieabstrahlung eines Elektrons ist von der Bahn n abhängig. Hier wird deutlich, dass das klassische Bild im atomaren Bereich nicht zutreffend ist, da sonst die Elektronen stets Energie verlieren würden und Wasserstoffatome instabil wären.