Aufgabe 19 (Separation der Schwerpunktbewegung) (5 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Systems zweier Teilchen, die durch ein entfernungsabhängiges Potential wechselwirken, lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + V(|\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2|) \tag{1}$$

und die Vertauschungsrelationen lauten

$$[r_{\mu,i}, r_{\nu,j}] = 0 \ , \quad [p_{\mu,i}, p_{\nu,j}] = 0 \ , \quad \text{und} \quad [r_{\mu,i}, p_{\nu,j}] = i\hbar\delta_{i,j}\delta_{\mu,\nu} \tag{2}$$

Dabei beziehen sich die Indizes $\mu, \nu \in \{1,2\}$ auf Teilchen 1 bzw. 2 und die Indizes $i, j \in \{1,2,3\}$ auf die drei Raumrichtungen. Die Schwerpunkt- und Relativkoordinate sind definiert durch

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{m_1\hat{\mathbf{r}}_1 + m_2\hat{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} \ , \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2 \tag{3}$$

und die dazugehörigen Impulse sind

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2 \ , \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{m_2\hat{\mathbf{p}}_1 - m_1\hat{\mathbf{p}}_2}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

a) Zeige, daß die neuen Operatoren die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j} \ , \quad \text{und} \quad [\hat{R}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{i,j} \tag{5}$$

erfüllen und daß alle anderen Kommutatoren der neuen Variablen verschwinden.

b) Zeige, daß der Hamilton-Operator in den neuen Koordinaten lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(|\hat{\mathbf{r}}|) \ . \tag{6}$$

Dabei ist $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse und $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ die reduzierte Masse des Systems.

c) Die stationäre Schrödingergleichung zum Hamiltonian (6) kann durch den Separationsansatz $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{r})$ gelöst werden. Welche Gleichungen müssen $\Phi(\mathbf{r})$ und $\varphi(\mathbf{r})$ erfüllen? Wie lautet die Lösung $\Phi(\mathbf{R})$ und der dazugehörige Eigenwert? Was ist deren physikalische Bedeutung?

Aufgabe 20 (Harmonischer Oszillator in drei Dimensionen) (4 Punkte)

Betrachte den dreidimensionalen, harmonischen Oszillator, dessen Hamiltonoperator lautet:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\mathbf{r}}^2 \ . \tag{7}$$

a) Bestimme das Energiespektrum dieses Systems. (Hinweis: verwende die bekannten Ergebnisse für den eindimensionalen harmonischen Oszillator!)

b) Bestimme den Entartungsgrad der Energieeigenwerte.

Abgabe: Mo. 18.12.06, 12:00 Uhr