Aufgabe 16 (System mit Drehimpuls 1) (3 Punkte)

Bestimme die Matrixdartsellung der Drehimpulsoperatoren

$$\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z) \qquad \hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y\ , \qquad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y\ , \qquad \hat{\mathbf{J}}^2 \tag{1}$$

für ein System mit Drehimpulsquantenzahl $j = 1$. Verwende die orthonormierte Basis $|j,m\rangle$ der Eigenzustände von $\hat{\mathbf{J}}^2$ und $\hat{J}_z$, d.h.

$$\hat{\mathbf{J}}^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \quad \text{und} \quad \hat{J}_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle\ . \tag{2}$$

Aufgabe 17 (Streuung der Bahndrehimpulse) (3 Punkte)

Ein Teilchen in einem kugelsymmetrischen Potential sei in dem Eigenzustand $|l,m\rangle$ des Bahndrehimpulses $\hat{\mathbf{L}}^2$ und $\hat{L}_z$. Zeige, daß die Streuungen $\langle(\Delta\hat{L}_x)^2\rangle$ und $\langle(\Delta\hat{L}_y)^2\rangle$ im Zustand $|l,m\rangle$ gegeben sind durch ($\Delta\hat{L}_i = \hat{L}_i - \langle\hat{L}_i\rangle$)

$$\langle(\Delta\hat{L}_x)^2\rangle = \langle(\Delta\hat{L}_y)^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\Big(l(l+1) - m^2\Big)\ . \tag{3}$$

Wie kann man das Ergebnis anschaulich interpretieren?

Aufgabe 18 (Wellenfunktion des Elektrons im Wasserstoff-Atom) (3 Punkte)

Die Wellenfunktionen für ein Elektron im Wasserstoffatom lauten

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta,,\phi) \tag{4}$$

mit den Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta,\phi)$. Die Radialfunktionen für den $1s$- ($n=1, l=0$), $2s$- ($n=2, l=0$) und $2p$- ($n=2, l=1$) Zustand lauten

$$\begin{aligned} R_{1s}(r) &= R_{1,0}(r) = N_{1,0}\exp(-\frac{r}{a_0}) \\ R_{2s}(r) &= R_{2,0}(r) = N_{2,0}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)\exp(-\frac{r}{2a_0}) \\ R_{2p}(r) &= R_{2,1}(r) = N_{2,1}\frac{r}{a_0}\exp(-\frac{r}{2a_0}) \end{aligned} \tag{5}$$

mit dem Bohrschen Radius $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$.

a) Bestimme die Normierungskonstanten $N_{n,l}$ aus der Normierungsbedingung für die Gesamtwellenfunktion

$$\int \mathrm{d}^3r\ \psi^*_{n,l,m}(r,\theta,\phi)\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = 1 \tag{6}$$

und zeige explizit, daß die gegebenen Zustände untereinander orthogonal sind.

b) Skizziere jeweils $|R_{n,l}(r)|^2$ und $4\pi r^2|R_{n,l}(r)|^2$. Welche Bedeutung hat insbesondere die letztere Größe?

Abgabe: Mo. 11.12.06, 12:00 Uhr