Aufgabe 15 (Kohärente Zustände) (9 Punkte)

Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators ist $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ mit dem Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperator

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \,, \tag{1}$$

die die Vertauschungsrelation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ erfüllen. Die Eigenzustände von $\hat{H}$ werden mit $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ bezeichnet und sind orthonormiert, $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$. Außerdem gilt

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \,, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{für } n > 0 \,, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{2}$$

Für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ kann man einen sog. kohärenten Zustand definieren durch

$$|\varphi_\lambda\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\lambda|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \,. \tag{3}$$

a) Zeige, daß $|\varphi_\lambda\rangle$ ein Eigenzustand des Operators $\hat{a}$ ist. Wie lautet der Eigenwert?

b) Zeige, daß $\langle\varphi_\lambda|\varphi_\lambda\rangle = 1$ und $\langle\varphi_{\lambda_1}|\varphi_{\lambda_2}\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\lambda_1 - \lambda_2|^2 + i\mathrm{Im}(\lambda_1^*\lambda_2))$.

c) Drücke die Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$ und $\hat{p}^2$ durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus und berechne $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}\rangle$ sowie $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ und $\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$. Dabei ist $\Delta\hat{x} = \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle$ und $\Delta\hat{p}$ analog. Wie groß ist $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ und was fällt daran auf?

d) Zeige, daß die Zeitabhängigkeit eines kohärenten Zustands gegeben ist durch

$$|\varphi_\lambda(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{2}\omega t)|\varphi_{\lambda(t)}\rangle \quad \text{mit } \lambda(t) = \lambda\exp(-i\omega t) \,. \tag{4}$$

e) Bestimme $\langle x(t)\rangle = \langle\varphi_\lambda(t)|\hat{x}|\varphi_\lambda(t)\rangle$ und $\langle p(t)\rangle = \langle\varphi_\lambda(t)|\hat{p}|\varphi_\lambda(t)\rangle$.

f) Bestimme $\langle(\Delta x(t))^2\rangle = \langle\varphi_\lambda(t)|(\Delta\hat{x})^2|\varphi_\lambda(t)\rangle$ und $\langle(\Delta p(t))^2\rangle = \langle\varphi_\lambda(t)|(\Delta\hat{p})^2|\varphi_\lambda(t)\rangle$.

Abgabe: Mo. 4.12.06, 12:00 Uhr