Aufgabe 12 (Ehrenfest-Theorem) (3 Punkte)

Ein quantenmechanisches Teilchen bewegt sich unter dem Einfluß des Hamiltonians

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}) \tag{1}$$

Zeige, daß der Erwartungswert des Orts- und Impulsoperators bezüglich eines beliebigen Zustands $|\psi(t)\rangle$ die folgenden Differentialgleichungen erfüllen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle = \frac{\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle}{m} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle = \langle\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})\rangle \ . \tag{2}$$

Dabei ist $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$. Für welche speziellen Potentiale gilt $\langle\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})\rangle = \mathbf{F}(\langle\mathbf{r}\rangle)$?

Aufgabe 13 (Spin-Präzession) (4 Punkte)

Der Operator eines Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens der Ladung q im Magnetfeld $\mathbf{B}$ ist $\hat{H} = -\frac{q}{m}\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{B}$ mit $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Gegeben ist die Basis $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ der Eigenkets von $\hat{S}_z$ mit

$$\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle \ , \qquad \hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle \ . \tag{3}$$

In dieser Basis werden die Operatoren der Komponenten von $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ dargestellt durch die Pauli-Matrizen aus Aufgabe 8. Das Magnetfeld sei homogen in z-Richtung, $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ mit konstantem B_0 und dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_z$ in z-Richtung.

a) Bestimme die zeitliche Entwicklung des Zustands $|\alpha, t_0; t\rangle$ für $t > 0$ wenn das System bei $t_0 = 0$ im Zustand $|\alpha, t_0; t_0\rangle = c_\uparrow|\uparrow\rangle + c_\downarrow|\downarrow\rangle$ ist!

b) Bestimme den zeitlichen Verlauf der Erwartungswerte von $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ und $\hat{S}_z$ für die Spezialfälle $c_\uparrow = 1$ und $c_\downarrow = 0$ sowie für $c_\uparrow = c_\downarrow = \frac{1}{\sqrt{2}}$!

Aufgabe 11 (Virialsatz) (3 Punkte)

Gegeben seien die Eigenzustände $|\psi\rangle$ der (eindimensionalen) stationären Schrödingergleichung $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$.

a) Zeige, daß für jeden Operator $\hat{A}$ der Erwartungswert $\langle\psi|[\hat{H},\hat{A}]|\psi\rangle$ verschwindet!

b) Zeige, daß für Potentiale der Form $V(\hat{x}) = V_0\hat{x}^k$ mit $V_0, k \in \mathbb{R}$ der Virialsatz gilt:

$$\frac{1}{2m}\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle = \frac{k}{2}\langle\psi|V(\hat{x})|\psi\rangle \ . \tag{4}$$

(Hinweis: Verwende das Ergebnis aus a) für den Fall $\hat{A} = \hat{p}\hat{x}$!)

Abgabe: Mo. 27.11.06, 12:00 Uhr