Aufgabe 9 (Simultane Eigenzustände kompatibler Observablen) (4 Punkte)

Gegeben sei ein 3-dimensionaler Hilbertraum mit den (orthonormierten) Basiskets $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$. In dieser Basis lautet die Darstellung zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$

$$\hat{A} \doteq \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \hat{B} \doteq \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Das Spektrum von $\hat{A}$ ist entartet (Eigenwerte von $\hat{A}$?). Berechne die Eigenwerte von $\hat{B}$. Gibt es auch hier Entartungen?

b) Zeige, daß $\hat{A}$ und $\hat{B}$ vertauschen und finde einen neuen Satz normierter Basiskets, die gleichzeitige Eigenkets von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind. Sind diese neuen Basiskets durch Angabe ihrer jeweiligen Eigenwerte von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ eindeutig bestimmt?

Aufgabe 10 (Operatorbeziehungen) (4 Punkte)

Beweise die folgenden Operatorbeziehungen:

a) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$.

b) Jacobi-Identität: $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$.

c) Baker-Haussdorff-Formel: $\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(-\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{C}_n$
mit $\exp(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{A}^n$ sowie $\hat{C}_0 = \hat{B}$ und $\hat{C}_n = [\hat{A}, \hat{C}_{n-1}]$ für $n = 1, 2, \ldots$.
(Hinweis: Entwickle $\hat{F}(\lambda) = \exp(\lambda\hat{A})\hat{B}\exp(-\lambda\hat{A})$ in eine Taylorreihe nach Potenzen von λ und setze am Ende $\lambda = 1$.)

Aufgabe 11 (Impulsraumdarstellung) (4 Punkte)

Gegeben seien die Eigenkets des Impuls- und Ortsoperators in einer Dimension, $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$ und $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$.

a) Zeige, daß für einen beliebigen Ket $|\alpha\rangle$ gilt: $\langle p|\hat{x}|\alpha\rangle = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\alpha\rangle$

b) Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für die Wellenfunktion $\Phi_\alpha(p) = \langle p|\alpha\rangle$ im Impulsraum im Fall des harmonischen Oszillators mit $V(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$?

Abgabe: Mo. 20.11.06, 12:00 Uhr