
Aufgabe 7 (Potentialbarriere) (7 Punkte)

Gegeben ist eine eindimensionale Potentialbarriere ($V_0 > 0$) durch

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

a) Bestimme die nicht-normierten Energieeigenfunktionen der eindimensionalen Schrödingergleichung zur Energie $E(> 0)$, die sich verhalten wie

$$\varphi(x) = \begin{cases} A\exp(ikx) + B\exp(-ikx) & \text{für } x \leq 0 \\ C\exp(ikx) & \text{für } x \geq a \end{cases} \tag{2}$$

Dabei ist $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.

b) Bestimme den Transmissionskoeffizienten $T = \left|\frac{C}{A}\right|^2$ und den Reflexionskoeffizienten $R = \left|\frac{B}{A}\right|^2$ und zeige, daß $R + T = 1$. Diskutiere die Fälle $E < V_0$ und $E > V_0$ getrennt wenn nötig.

Aufgabe 8 (Pauli-Matrizen) (5 Punkte)

Der Operator für den Spin eines Elektrons ist $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) = \frac{\hbar}{2}\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. In der Basis der Eigenzustände von $\hat{S}_z$ werden die Komponenten von $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ durch die Pauli-Matrizen dargestellt:

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Berechne die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren von σ_i!

b) Berechne die Matrizenprodukte $\sigma_i^n \sigma_j$ für $n \in \mathbb{N}$!

c) Berechne die Kommutatoren $[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i$ und die Anti-Kommutatoren $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$! Berechne $[\boldsymbol{\sigma}^2, \sigma_i]$ mit $\boldsymbol{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2$!

d) Berechne für beliebige Vektoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mit A_i, $B_i \in \mathbb{C}$ den Ausdruck

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B})\,. \qquad \text{Dabei ist } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i A_i\,. \tag{4}$$

e) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ bestimme $\exp(i\sigma_2\alpha/2)$.
(Hinweis: Verwende die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion!)

Abgabe: Mo. 13.11.06, 12:00 Uhr