Aufgabe 5 (Potentialtopf) (7 Punkte)

Gegeben ist ein eindimensionaler Potentialtopf ($V_0 > 0$) durch

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

a) Bestimme die gebundenen, normierten Energieeigenfunktionen!
Hinweis: Verwende die Stetigkeit der Wellenfunktion und ihrer ersten Ableitung an den Sprungstellen des Potentials!

b) Wieviele gerade und ungerade gebundene Zustände gibt es für vorgegebene Werte von V_0 und a? Diskutiere die Energieeigenwerte qualitativ!

c) Gehe durch einen geeigneten Grenzübergang zum attraktiven δ-Potential

$$V(x) = -C\,\delta(x) \tag{2}$$

mit $C > 0$ über. Wieviele gebundene Zustände gibt es in diesem Fall, wie lauten sie und wie ist ihre Energie?

Aufgabe 6 (Sommerfeldsche Polynommethode) (5 Punkte)

Bestimme die stationären Wellenfunktionen und Eigenenergien für ein Teilchen im Potential

$$V(x) = V_0\left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right)^2 \quad (x > 0\,,\ V_0 > 0)\,. \tag{3}$$

a) Untersuche zunächst das Verhalten der Wellenfunktion für große x und in der Umgebung von $x = 0$.

b) Mache einen Produktansatz für die Wellenfunktion, bei dem die Lösung in der Umgebung von $x = \infty$ und $x = 0$ abgespalten wird. Wie lautet die resultierende Differentialgleichung?
Hinweis: eine günstige Substitution ist $\xi = x^2\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2 a^2}}$

c) Ein Reihenansatz für die in b) erhaltene Differentialgleichung führt auf eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Reihe. Zeige, daß diese Reihe abbrechen muss und bestimme daraus die Energieeigenwerte!

Abgabe: Mo. 6.11.06, 12:00 Uhr