Aufgabe 3 (Wellenpaket für freies Teilchen) (7 Punkte)

Die Wellenfunktion für ein freies Teilchen (Masse m) in einer Raumdimension sei zur Zeit $t = 0$ gegeben durch

$$\Psi(x, t = 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2} + ik_0 x\right) \tag{1}$$

a) Berechne die Normierungskonstante A.

b) $\Psi(x, 0)$ kann auch als Wellenpaket der Form

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \tilde{\Psi}(k) \exp(ikx) \tag{2}$$

geschrieben werden. Bestimme $\tilde{\Psi}(k)$!

c) Für Zeiten $t > 0$ entwickle sich die gegebene Wellenfunktion gemäß der zeitanhängigen Schrödingergleichung in einer Dimension

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) \ . \tag{3}$$

Bestimme $\Psi(x, t)$! Verwende dabei für die Kreisfrequenz ω einer ebenen Welle der Wellenzahl k den aus der de-Broglie Beziehung $p = \hbar k$ und der nicht-relativistischen Energie-Impuls-Relation $E = \frac{p^2}{2m} = \hbar\omega$ folgenden Zusammenhang.

d) Berechne die durch $\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$ gegebene Wahrscheinlichkeitsdichte zur Zeit t. Diskutiere das zeitliche Verhalten von $\rho(x, t)$ (Maximum und Breite).

Aufgabe 4 (Galilei-Transformation) (3 Punkte)

Zeige, daß die eindimensionale Schrödingergleichung für ein freies Teilchen invariant ist unter der Galilei-Transformation

$$x' = x - vt\ , \qquad t' = t \tag{4}$$

wenn man gleichzeitig die Wellenfunktion in folgender Weise transformiert:

$$\tilde{\Psi}(x', t') = \exp(if(x, t))\Psi(x, t) \ . \tag{5}$$

Bestimme $f(x, t)$! Berechne für die ebene Welle $\Psi = \exp(i(kx - \omega t))$ die Wellenzahl k' und die Kreisfrequenz ω' im transformierten System, das sich gegenüber dem ursprünglichen System mit der Geschwindigkeit v bewegt.

Abgabe: Mo. 30.10.06, 12:00 Uhr