Aufgabe 28 (Variationsmethode) (4 Punkte)

Die Variationsmethode kann auch zur Abschätzung der niedrigsten Anregungsenergien einer gegebenen Symmetrie verwendet werden, wenn die Testfunktionen für verschiedene Symmetrien orthogonal sind.

Betrachte die Testfunktionen

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = r^l \exp(-\alpha r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{1}$$

für das Wasserstoffproblem und bestimme die variationelle Abschätzung der niedrigsten Energie zur Drehimpulsquantenzahl $l = 1$ und $l = 2$. Vergleiche mit dem exakten Ergebnis.

Aufgabe 29 (Anharmonischer Oszillator) (4 Punkte)

Der Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ des eindimensionalen anharmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \\ \hat{H}_1 &= \gamma \hat{x}^4 \quad , \quad \gamma > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Berechne die Energiekorrekturen $\Delta E_n^{(1)}$ für den n-ten Eigenzustand $|n^{(0)}\rangle$ des ungestörten Hamiltonians $\hat{H}_0$ in erster Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 30 (Stark-Effekt fur Grundzustand des Wasserstoffatoms) (4 Punkte)

Ein Wasserstoffatom befindet sich im äußeren homogenen elektrischen Feld E in z-Richtung, dessen Potential lautet $V_1(\mathbf{r}) = eEz$.

a) Zeige, daß die Korrektur $\Delta E_0^{(1)}$ der Grundzustandsenergie in erster Ordnung Störungstheorie verschwindet.

b) Zeige, daß die Energiekorrektur zweiter Ordnung, $\Delta E_0^{(2)}$, durch

$$\Delta E_0^{(2)} > -\frac{8}{3} (4\pi\epsilon_0)\, a_0^3\, E^2 \tag{3}$$

abgeschätzt werden kann. Dabei ist a_0 ist der Bohr'sche Radius.

Abgabe: Mo. 5.2.07, 12:00 Uhr