Aufgabe 26 (Elektron im Magnetfeld) (4 Punkte)

Ein Elektron (Ladung $q = -e$, $e > 0$) bewegt sich im homogenen Magnetfeld in z-Richtung, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B\mathbf{e}_z$, und im Potential $V(\mathbf{r}) \equiv 0$. Der Hamiltonoperator lautet also

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{\pi}}^2 + \mu_B \hat{\sigma}_z B \tag{1}$$

mit dem Operator des kanonischen Impulses (in Ortsdarstellung) $\hat{\boldsymbol{\pi}} = \frac{\hbar}{i}\nabla + e\mathbf{A}(\mathbf{r})$, dem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, dem Bohrschen Magneton μ_B und der Pauli-Matrix $\hat{\sigma}_z$. Bestimme die Energieeigenwerte und die Eigenzustände des Problems.

Aufgabe 27 (Elektron im Hohlzylinder) (5 Punkte)

Ein Elektron bewegt sich im folgenden Potential (gegeben in Zylinderkoordinaten) :

$$V(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho_a \leq \rho \leq \rho_b \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

a) Wie lauten die Randbedingungen für die Wellenfunktion bei $\rho = \rho_a$ und $\rho = \rho_b$?

b) Finde die (nicht-normierten) Energieeigenfunktionen mit Hilfe eines Separationsansatzes und zeige, daß die Energieeigenwerte gegeben sind durch

$$E_{lnk} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_{ln}^2 + k^2\right) \ . \tag{3}$$

Dabei ist k eine kontinuierliche Wellenzahl und die k_{ln} sind gegeben als n-te Wurzel der transzendenten Gleichung (l ganzzahlig! Warum?)

$$J_l(k_{ln}\rho_b)N_l(k_{ln}\rho_a) - J_l(k_{ln}\rho_a)N_l(k_{ln}\rho_b) = 0 \ . \tag{4}$$

Die Funktionen $J_l(x)$ und $N_l(x)$ sind definiert als die linear unabhängigen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} J_l(x) + x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} J_l(x) + (x^2 - l^2) J_l(x) = 0 \tag{5}$$

und entsprechend für $N_l(x)$.

c) Zusätzlich zu obigem Potential wird ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z = \nabla \times \mathbf{A}$ für $0 \leq \rho < \rho_a$ angelegt. Wie lautet das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und wie verändert sich die Säkulargleichung (4) für die Energieeigenwerte?

Abgabe: Mo. 22.1.07, 12:00 Uhr