Aufgabe 24 (Doppelmulden-Potential) (5 Punkte)

Das durch δ-Funktionen genäherte eindimensionale Doppelmulden-Potential

$$V(x) = -\lambda\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right) \tag{1}$$

($\lambda > 0$, $a > 0$) liefert ein grobes Modell für bestimmte Molekülbindungen.

a) Bestimme die (nicht-normierten) gebundenen Eigenzustände des Systems mit gerader und ungerader Parität und die dazugehörigen Bedingungen für die Energieeigenwerte.
(**Hinweis:** Die Wellenfunktion kann bei $x_0 = \pm a$ als stetig angenommen werden. Die Bedingung für ihre erste Ableitung an diesen Stellen ergibt sich durch Integration der Schrödinger-Gleichung von $x_0 - \epsilon$ bis $x_0 + \epsilon$ and anschließenden Grenzübergang $\epsilon \to 0$.)

b) Löse die Gleichungen für die Eigenwerte qualitativ durch ein graphisches Verfahren.

c) Skizziere qualitativ die Eigenwerte für Zustände gerader und ungerader Parität als Funktion von a. Betrachte den Grenzwert $a \to \infty$ explizit.

Aufgabe 25 (Teilchen im periodischen Potential) (5 Punkte)

Für die Energieeigenfunktionen $\varphi(x)$ eines Teilchens im eindimensionalen, periodischen Potential $V(x+a) = V(x)$ gilt das Bloch-Theorem (siehe Vorlesung)

$$\varphi_k(x+a) = \exp(ika)\ \varphi_k(x) \tag{2}$$

mit $-\pi/a < k \leq \pi/a$.

a) Betrachte das Potential

$$V(x) = \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x+na) \tag{3}$$

($\lambda > 0$) und gebe die Bestimmungsgleichung für die Energieeigenwerte an.

b) Zeige, daß diese Gleichung nur für Energien innerhalb bestimmter Intervalle (Energiebänder) gelöst werden kann, die durch verbotene Bereiche (Energielücken) voneinander getrennt sind.

c) Bestimme die Grenzen der Energiebänder graphisch und zeige, daß die Energielücken für größere Energien immer kleiner werden.

Abgabe: Mo. 15.1.07, 12:00 Uhr