

Aufgabe 21 (Clebsch-Gordan-Koeffizienten) (5 Punkte)

Bestimme die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\langle ls; m_l m_s | jm \rangle$ für eine Elektron mit Bahndrehimpuls l und Spin $s = \frac{1}{2}$. Die globale Phase ist bestimmt durch

$$\left\langle l \frac{1}{2}; l \frac{1}{2} \left| l + \frac{1}{2} \ l + \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \quad . \quad (1)$$

Aufgabe 22 (Irreduzible Tensoroperatoren) (4 Punkte)

Für einen Operator \hat{A} sei folgende Operatorfunktion definiert:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 \{ \hat{A} \} \equiv [\hat{J}_x, [\hat{J}_x, \hat{A}]] + [\hat{J}_y, [\hat{J}_y, \hat{A}]] + [\hat{J}_z, [\hat{J}_z, \hat{A}]] \quad (2)$$

Zeige, daß für die q -te Komponente $\hat{T}_q^{(k)}$ eines irreduziblen Tensoroperators $\hat{T}^{(k)}$ vom Rang k gilt:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 \{ \hat{T}_q^{(k)} \} = \hbar^2 k(k+1) \hat{T}_q^{(k)} \quad (3)$$

Aufgabe 23 (Projektions-Theorem) (4 Bonus-Punkte)

Sei \hat{K}_i die i -te Komponente eines Vektoroperators und $\hat{\mathbf{J}}$ der Operator des Gesamtdrehimpulses mit Eigenkets $|jm\rangle$ von $\hat{\mathbf{J}}^2$ und $\hat{J}_z = \hat{J}_3$. Zeige, daß gilt

$$\langle jm | \hat{K}_i | jm' \rangle = \langle jm | \hat{J}_i | jm' \rangle \frac{\langle jm | \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}} | jm \rangle}{\hbar^2 j(j+1)} \quad (4)$$

mit $\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{K}} = \sum_{i=1}^3 \hat{J}_i \hat{K}_i$.

Abgabe: Mo. 8.1.07, 12:00 Uhr