Theoretische Physik III Übungszettel 9

Heiko Dumlich, Max Hoffmann

18. Juni 2006

22 Elektromotorische Kraft I

Wir betrachten ein Elektron, welches sich mit der Geschwindigkeit v in der xy-Ebene, in Anwesenheit eines mit $\frac{dB_z}{dt}$ in der Zeit zunehmenden Magnetfeldes, bewegt. Zu bestimmen ist die Tangentialbeschleunigung.

Wir betrachten die Kräfte die auf das Elektron wirken:

$$\vec{F}_L = -e\left(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}\right)$$

$$\vec{F}_Z = m\left(\vec{v} \times \vec{\omega}\right)$$

Da $\vec{E}$ durch das Elektron erzeugt wird, jedoch nicht in radieller Richtung wirkt, können wir es für die Betrachtung des Kräftegleichgewichts in radieller Richtung vernachlässigen, somit folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_L = -e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) &= m\left(\vec{v} \times \vec{\omega}\right) = \vec{F}_Z \\
evB\vec{e}_r &= \frac{mv^2}{r}\vec{e}_r \\
r &= \frac{mv}{eB}
\end{aligned}$$

Dies ist also der Kreisradius der Elektronenflugbahn.

Wir können das Faradaysche Induktionsgesetz ausnutzen um das $\vec{E} - Feld$ das durch das Elektron erzeugt wird, zu bestimmen:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Führen wir nun bei diesem eine Flächenintegration auf beiden Seiten aus, so folgt:

$$\int_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\int_S d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Mit Hilfe von Stokes können wir dies zu:

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

umformen. Unter der Annahme, dass sich das Elektron durch den Ausgleich der beiden Kräfte auf einer Kreisbahn des Radius r bewegt, können wir die Integration ausführen und erhalten:

$$\begin{aligned}
2\pi r E \left(\vec{n}_l \cdot \vec{n}_E\right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r dr'\, r' \int_0^{2\pi} d\varphi\, B_z \left(\vec{n}_S \cdot \vec{e}_z\right) \\
2\pi r E &= -\frac{\partial}{\partial t} \pi r^2 B_z \\
E &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{r}{2} \\
\vec{E} = E\vec{e}_t &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \frac{r}{2} \vec{e}_t
\end{aligned}$$

da $\vec{n}_S \parallel \vec{e}_z$ und $\vec{n}_l \parallel \vec{n}_E = \vec{e}_t$. Der Vektor $\vec{e}_t$ zeigt in Tangentiale Richtung.
Dies können wir nun in einen Kraftansatz einsetzen:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= m\vec{a} = q\vec{E} \\
m\vec{a} &= q\left(-\frac{\partial B}{\partial t} \frac{r}{2}\right) \vec{e}_t \\
m\vec{a} &= e\frac{\partial B}{\partial t} \frac{mv}{2eB} \vec{e}_t \\
\vec{a} &= \frac{\partial B}{\partial t} \frac{v}{2B} \vec{e}_t \\
\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_t &= \frac{v}{2B} \frac{\partial B}{\partial t} \vec{e}_t
\end{aligned}$$

Nun können wir noch die DGL lösen(vereinfacht):

$$B = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot t + c$$

$$\frac{dv}{dt} = a = \frac{v}{2\frac{\partial B}{\partial t} \cdot t + 2c} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{v}{2t + 2\frac{c}{\frac{\partial B}{\partial t}}} = \frac{v}{2\left(t+d\right)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{v} &= \frac{dt}{2\left(t+d\right)} \\
\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t+d}{t_0+d}\right) \\
v &= v_0 \sqrt{\frac{t+d}{t_0+d}}
\end{aligned}$$

Somit folgt also:

$$\vec{a}_t == \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{1}{(t_0+d)\,(t+d)}}\vec{e}_t$$

Dies ist die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_t$.

23 Ampèresches Gesetz (nach Maxwell)

Wir betrachten eine hohle Metallkugel mit Radius a, welche mit einem konstanten Strom I geladen wird. Es ist das magnetische Induktionsfeld über der Kugel in einem Abstand ρ von einer Achse durch den Kugelmittelpunkt zu bestimmen.

Das Ampèresche Gesetz lautet nach Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

Da wir von einer Aufladungstechnik ausgehen, bei der die Ladungen instantan auf der Kugel gleichverteilt erscheinen, folgt für $\vec{J} = 0$ und die Gleichung vereinfacht sich zu:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Da wir, wenn wir einen festen Zeitpunkt betrachten, eine bestimmte Ladung auf der Hohlkugel besitzen, erzeugt diese ein $\vec{E} - Feld$, da jedoch die Ladung mit $I = \frac{dQ}{dt}$ sich zeitlich verändert, da der Kugel konstant Ladung hinzugefügt wird, wird also auch das elektrische Feld zeitlich verändert. Für das elektrische Feld einer Hohlkugel gilt:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

Für das Verhältnis zwischen Verschiebungsstrom und Elektrischem Feld gilt (im Vakuum):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

somit also:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dies entspricht aber nach Einsetzen des $\vec{E} - Feldes$ der Hohlkugel (außen, da das Feld innen verschwindet):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\frac{dQ}{dt}}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

Mit $I = \frac{dQ}{dt}$ liefert das:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{e_r}$$

Nun können wir beide Seiten über die Fläche des zu beobachtenden Bereiches Integrieren:

$$\int_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\vec{S'} \frac{1}{r'^2} \cdot \vec{e_r}$$

Hierbei ist das $r^2 = d^2 + \rho^2$, wie man sich aus einer Skizze klarmachen kann, wobei d der Abstand zwischen dem Kugelmittelpunkt und dem zu integrierenden Kreis ist. Mit Stokes können wir umformen:

$$\int_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{B} = \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{B}$$

wobei wir über die Kreislinie vom Kreis mit dem Radius ρ integrieren:

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S dS' \frac{1}{r'^2} \vec{n} \cdot \vec{e_r}$$

Hierbei gilt $\vec{n} \parallel \vec{e_r}$ und $d\vec{l} \parallel \vec{B} = B_\theta \vec{e_\theta}$. Somit folgt:

$$2\pi\rho B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\rho d\rho' \frac{\rho'}{\rho'^2 + d^2} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Dies liefert:

$$B = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \ln\left(\frac{\rho^2 + d^2}{d^2}\right)$$

Somit folgt für das magnetische Induktionsfeld:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \ln\left(\left(\frac{\rho}{d}\right)^2 + 1\right) \vec{e_\theta}$$

24 Elektromotorische Kraft II

Wir betrachten eine elektrisch neutrale Metallkugel vom Radius a, die sich in einem uniformen Induktionsfeld $\vec{B}$ befinde. Die Kugel rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse parallel zu $\vec{B}$. Es ist das elektrische Potential innerhalb und außerhalb der Kugel zu bestimmen.

Es wirkt die Lorentz-Kraft auf die Ladungsträger innerhalb der Kugel:

$$\vec{F_L} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

1. Das bewirkt eine Ladungsverteilung, wobei im Gleichgewicht Innen gilt:

$$\vec{F} = \vec{0}$$

das heißt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_i = -\vec{v} \times \vec{B}$$

2. Das von der Ladungsverteilung verursachte Potential hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned}
\phi_i(r,\vartheta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta) \\
\phi_a(r,\vartheta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta)
\end{aligned}$$

Da außen das Potential für $\phi(\infty) = 0$ werden muss, muss der Koeffizient $C_l = 0$ für $l \neq 0$ verschwinden.

Wir betrachten nun $\vec{v} \times \vec{B} = B\omega r \sin\vartheta \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z$, dies liefert für Zylinderkoordinaten:

$$\vec{v} \times \vec{B} = \omega B \rho \vec{e}_\rho$$

Mit $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta} = r\sin\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho$. Mit der Bedingung aus 1. folgt somit:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi_i &= \vec{v} \times \vec{B} \\
\frac{\partial\phi_i}{\partial\rho} &= \omega B \rho \\
\phi_i &= \frac{\omega B \rho^2}{2} \\
\phi_i &= \frac{\omega B\, r^2 \sin^2\vartheta}{2}
\end{aligned}$$

Für den Rand gilt also wegen der Stetigkeit des Potentials:

$$\phi_i(a) = \phi_a(a)$$

Somit also auch:

$$\phi_a(a) = \frac{\omega B\, a^2 \sin^2\vartheta}{2}$$

Für die allgemeine Form des Potentials gilt:

$$\phi_a(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta)$$

Mit der Randbedingung folgt, dass nur $l = 2$ und $l = 0$ zusammen ein Ergebnis liefern können, damit wir den $\sin^2\theta$ Term erhalten können, hierbei ist zu beachten, dass der Term C_2 wegfallen muss, wie oben bereits erwähnt, da sonst im unendlichen ein unendliches Potential existieren würde. Der D_0 Term jedoch muss wegfallen, da die Ladung insgesamt 0 ist, d.h. da die Kugel elektrisch neutral ist und somit die positiven und negativen Ladungen sich ausgleichen. Daher kann auch im ursprung das Potential nicht unendlich werden. Somit folgt also:

$$\frac{\omega B\, a^2 \sin^2\vartheta}{2} = C_0 P_0\left(\cos\vartheta\right) + D_2 a^{-3} P_2\left(\cos\vartheta\right)$$

$$\frac{\omega B\, a^2 \sin^2\vartheta}{2} = C_0 + D_2 a^{-3} \frac{\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)}{2}$$

es folgt also:

$$C_0 = \frac{\omega B}{3} a^2$$

$$D_2 = -\frac{\omega B}{3} a^5$$

Und somit folgt für das Potential aussen:

$$\phi_a\left(r, \vartheta\right) = \frac{\omega B}{3} a^2 - \frac{\omega B}{3} \frac{a^5}{r^3} \frac{\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)}{2}$$

und für innen hatten wir oben:

$$\phi_i\left(r, \vartheta\right) = \frac{\omega B\, r^2 \sin^2\vartheta}{2}$$

gefunden.