Theoretische Physik III Übungszettel 8

Heiko Dumlich, Max Hoffmann

12. Juni 2006

20 Biot-Savart-Gesetz

(a)

Wir betrachten das Biot-Savart Gesetz in differentieller Form:

$$d\vec{B}\left(\vec{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l'} \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{\left|\vec{x} - \vec{x}'\right|^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{l'} \times \nabla \frac{1}{\left|\vec{x} - \vec{x}'\right|}$$

für die magnetische Induktion $\vec{B}\left(\vec{x}\right)$, die von einem Stromelement $d\vec{l'}$ bei $\vec{x}'$ am Punkt $\vec{x}$ erzeugt wird. Zu zeigen ist, dass das Induktionsfeld einer vom Strom I durchflossenen Schleife durch

$$\vec{B}\left(\vec{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega\left(\vec{x}\right)$$

mit $\Omega\left(\vec{x}\right)$ dem von der Schleife über dem Punkt $\vec{x}$ aufgespannte Raumwinkel, dargestellt werden kann.

Wir benutzen den **Stokes**schen Satz:

$$\epsilon_{ijk} \int_S dS_i \partial_j A_k = \oint_C dl_i A_i$$

wobei wir unsere differentielle Form integrieren und es gilt:

$$\vec{B}\left(\vec{x}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C d\vec{l'} \times \nabla \frac{1}{\left|\vec{x} - \vec{x}'\right|} \tag{1}$$

mit dem **Stokes**schen Satz können wir das Linienintegral in ein Flächenintegral transformieren, wobei wir die Abkürzung $\nabla \frac{1}{\left|\vec{x} - \vec{x}'\right|} = \vec{A}$ wählen und zum Sparen von Schreibarbeit den Vorfaktor vorerst vernachlässigen, es gilt (Stokes):

$$\int_C d\vec{l'} \times \vec{A} = \int_S \left(d\vec{S}' \times \nabla\right) \times \vec{A}$$

und für die rechte Seite:

$$\int_S \left(d\vec{S'} \times \nabla\right) \times \vec{A} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} \int_S dS_i \partial_j A_l \vec{e}_m$$

somit folgt:

$$\int_C d\vec{l'} \times \vec{A} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} \int_S dS_i \partial_j A_l \vec{e}_m$$

Mit $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ folgt:

$$(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \int_S dS_i \partial_j A_l \vec{e}_m = \int_S dS_l \partial_m A_l \vec{e}_m - \int_S dS_m \partial_l A_l \vec{e}_m$$

Weiterhin ergibt sich:

$$\int_S dS_l \partial_m A_l \vec{e}_m - \int_S dS_m \partial_l A_l \vec{e}_m = \int_S dS_l \partial_m A_l \vec{e}_m - \int_S d\vec{S}\, \nabla \cdot \vec{A}$$

Der $\int_S dS_l \partial_m A_l \vec{e}_m$ Term wird 0 für $m \neq l$, da er in den anderen Fällen nur auf den Einheitsvektor wirkt:

$$\int_S dS_l \delta_{lm} \partial_m A_l \vec{e}_m - \int_S d\vec{S}\, \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\nabla \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A} - \int_S d\vec{S}\, \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Das zweite Integral enthält eine Delta-Funktion, die jedoch vom Integrationsbereich nicht getroffen wird, also 0 liefert, somit bleibt nur der erste Term übrig und es folgt:

$$\Leftrightarrow \int_C d\vec{l'} \times \vec{A} = \nabla \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}$$

dies würde sich auch sehr schnell mit der $abc - Regel/Gramann$-Identität ergeben, doch leider darf man diese nicht auf den Differentialoperator ∇ anwenden, aus Interesse betrachten wir dennoch kurz den Fall, obwohl er natürlich “falsch” ist:

$$\int_S \left(d\vec{S} \times \nabla\right) \times \vec{A} = \nabla \left(\int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}\right) - \vec{A}\left(d\vec{S} \cdot \nabla\right) = \nabla \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}$$

Mit einsetzen unseres oberen Ergebnisses in (1) erhalten wir:

$$\vec{B}\left(\vec{x}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \int_S d\vec{S} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Dies liefert, wobei $d\vec{S} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -d\Omega$ (siehe 2. Vorlesung):

$$\vec{B}\left(\vec{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \left(-\int_S d\vec{S'} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \Omega\left(\vec{x}\right)$$

unser gesuchtes Ergebnis.

(b)

Zu zeigen ist, dass der Winkel für $r = |\vec{x}| \gg |\vec{x}'| = r'$, folgende Gestalt annimmt:

$$I\Omega\left(\vec{x}\right) = -\frac{\vec{m}\cdot\vec{x}}{r^3}$$

Wir betrachten also den Winkel:

$$-I\int_S d\vec{S}'\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = I\Omega\left(\vec{x}\right)$$

Somit folgt:

$$I\Omega\left(\vec{x}\right) = -I\int_S d\vec{S}'\cdot\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

Wir können nun mit $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ das $|\vec{x}'|$ vernachlässigen und es folgt, wobei $|\vec{x}| = r$:

$$I\Omega\left(\vec{x}\right) = -I\int_S d\vec{S}'\cdot\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{r^3}$$

aus einer kleinen Zeichnung kann man sich klarmachen, dass auch die Richtung für $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ kaum noch von $\vec{x}'$ abhängt und somit auch als Näherung $\vec{x}-\vec{x}' \approx \vec{x}$ genutzt werden kann, somit ergibt sich:

$$I\Omega\left(\vec{x}\right) = -I\int_S d\vec{S}'\cdot\frac{\vec{x}}{r^3}$$

Es gilt, wie auf **Blatt 6** gezeigt:

$$\vec{S}_C = \int_S d\vec{S} = -\frac{1}{2}\oint_C d\vec{l}'\times\vec{x}'$$

unter Verwendung dieser Formel können wir schreiben:

$$I\Omega\left(\vec{x}\right) = -I\left(-\frac{1}{2}\oint_C d\vec{l}'\times\vec{x}'\right)\cdot\frac{\vec{x}}{r^3}$$

umgeschrieben:

$$I\Omega\left(\vec{x}\right) = \frac{I}{2}\oint_C\left(d\vec{l}'\times\vec{x}'\right)\cdot\frac{\vec{x}}{r^3}$$

für das magnetische Moment gilt:

$$\vec{m} = -\frac{I}{2}\oint_C d\vec{l}'\times\vec{x}'$$

Setzen wir dies in die Gleichung oben ein folgt:

$$-\frac{\vec{m}\cdot\vec{x}}{r^3} = \frac{\frac{I}{2}\oint_C\left(d\vec{l}'\times\vec{x}'\right)\cdot\vec{x}}{r^3}$$

Nun können wir sofort sehen, durch Vergleich der Umschreibungen, dass

$$I\Omega\left(\vec{x}\right)=\frac{I}{2}\oint_{C}\left(d\vec{l'}\times\vec{x}'\right)\cdot\frac{\vec{x}}{r^{3}}=-\frac{\vec{m}\cdot\vec{x}}{r^{3}}$$

gilt.
Für das Induktionsfeld $\vec{B}\left(\vec{x}\right)$ gilt:

$$\vec{B}\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_{0}I}{4\pi}\nabla\Omega\left(\vec{x}\right)$$

Nun setzen wir unser $\Omega\left(\vec{x}\right)=-\frac{\vec{m}\cdot\vec{x}}{Ir^{3}}$ ein und erhalten:

$$\vec{B}\left(\vec{x}\right)=-\frac{\mu_{0}}{4\pi}\nabla\left(\frac{\vec{m}\cdot\vec{x}}{r^{3}}\right)$$

(c)

Wir betrachten den expliziten Fall für einen Kreis mit Radius a im Ursprung und einem Beobachter, der sich mit den $\vec{x}-Koordinaten$ im Abstand d auf der Normalen durch den Kreismittelpunkt befinde:

$$\Omega\left(\vec{x}\right)=-\int_{S}d\vec{S}'\cdot\nabla\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}=\int_{S}d\vec{S}'\cdot\frac{\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^{3}}$$

Für den Kreis im Ursprung folgt mit:

$$S_{kugelsegment}=2\pi rh$$

$$a=\sqrt{h\left(2r-h\right)}\Leftrightarrow h=r\pm d\Rightarrow h=r-d$$

wir wählen $h=r-d$, da $r+d$ wie man aus der geometrischen Beobachtung sofort erkennen kann falsch sein muss.

$$r^{2}=a^{2}+d^{2}$$

Wir wählen $\vec{x}'=0$, da Mittelpunkt der Leiterschleife, dies liefert den vereinfachten Term:

$$\Omega\left(\vec{x}\right)=\int_{S}d\vec{S}'\cdot\frac{\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|^{3}}$$

Nun setzen wir unsere Ergebnisse ein:

$$\left|\vec{x}\right|=r$$

Wir erhalten:

$$\Omega\left(\vec{x}\right)=\int_{S}d\vec{S}'\cdot\frac{\vec{x}}{\left|\vec{x}\right|^{3}}=\int_{S}dS\frac{d}{d^{3}}=\frac{2\pi r\left(r-d\right)}{d^{2}}=\frac{2\pi\left(a^{2}+d^{2}-\sqrt{a^{2}d^{2}+d^{4}}\right)}{d^{2}}$$

21 Solenoid

Wir betrachten einen Solenoiden, d.h. eine ideale unendlich lange Spule mit n identischen stromführenden Windungen pro Längeneinheit und dem Strom I. Die Symmetrieachse sei die $z-Achse$. Die Windungen können als kreisförmig mit dem Radius $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = a$ und $z = konst.$ angenommen werden, so dass für die Stromdichte:

$$\vec{J}\,(\vec{x}) = I\,n\,\delta\,(\rho - a)\,\vec{e}_\varphi$$

wobei Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) verwendet wurden und $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$, gilt. Die Spule erzeugt ein Vektorpotential $\vec{A}\,(\vec{x})$ von der Form $\vec{A}\,(\vec{x}) = A\,(\rho)\,\vec{e}_\varphi$. Das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}\,(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}\,(\vec{x})$ und dessen Rotation sind somit durch

$$\vec{B}\,(\vec{x}) = B\,(\rho)\,\vec{e}_z = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\,[\rho A\,(\rho)]\,\vec{e}_z, \qquad \nabla \times \vec{B}\,(\vec{x}) = -\frac{d}{d\rho}B\,(\rho)\,\vec{e}_\varphi$$

gegeben. Zu bestimmen ist das Induktionsfeld $\vec{B}\,(\vec{x})$ im ganzen Raum unter Verwendung der Randbedingungen $A\,(0) = A\,(\infty) = 0$.

Es gilt für die Ableitung der Stufenfunktion $\frac{d}{dx}\Theta\,(x) = \delta\,(x)\,.$

Teil 1:

Wir betrachten $\nabla \times \vec{B}\,(\vec{x}) = \mu_0\vec{J}\,(\vec{x})$, somit folgt mit einsetzen der Formeln von oben:

$$-\frac{d}{d\rho}B\,(\rho)\,\vec{e}_\varphi = \mu_0 I\,n\,\delta\,(\rho - a)\,\vec{e}_\varphi$$

Nun müssen wir nur noch Integrieren:

$$B\,(\infty) - B\,(0) = -\mu_0 nI\int_0^\infty d\rho\,\delta\,(\rho - a)$$

Dies liefert:

$$B\,(\infty) - B\,(0) = -\mu_0 nI\int_{-a}^\infty dx\,\delta\,(x) = -\mu_0 nI\int_{-a}^\infty dx\,\frac{d}{dx}\Theta\,(x)$$

somit folgt für das $B - Feld:$

$$B\,(\infty) - B\,(0) = -\mu_0 nI\,[\Theta\,(x)]_{-a}^\infty \Leftrightarrow B\,(0) = \mu_0 nI + B\,(\infty)$$

da das $B - Feld$ im Unendlichen auf Grund der physikalischen Realität verschwinden muss, folgt:

$$B\,(0) = \mu_0 nI$$

Teil 2:

Wir betrachten das Vektorpotential $\vec{A}\,(\vec{x}) = A\,(\rho)\,\vec{e}_\varphi$, wobei allgemein für das Vektorpotential gilt:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, \frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Mit der Randbedingung $A(0) = A(\infty) = 0$ wissen wir, dass wir im Inneren einen Term haben müssen, der mit ρ oder einer höheren Potenz geht. Für den Term außerhalb, benötigen wir eine $\frac{1}{\rho}$ Abängigkeit, damit im Unendlichen eine Null entsteht. Nun nutzen wir unser Ergebnis aus dem ersten Teil:

$$B(0) = \mu_0 n I$$

Hierbei machen wir die Annahme, da wir wissen, dass das Feld in der Spule innerhalb als Näherung als homogen anzusehen ist, dass wir:

$$B(\rho) = \mu_0 n I$$

schreiben dürfen. Somit folgt also, nach einsetzen in die obige Formel:

$$\vec{B}(\vec{x}) = B(\rho)\,\vec{e}_z = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho A(\rho)\right]\vec{e}_z$$

Wir integrieren von 0 bis a :

$$\Rightarrow B(\rho) = \int_0^a d\rho' \, \mu_0 n I \rho' = \rho A(\rho)$$

Dies liefert:

$$A_a(\rho) = \frac{1}{2}\mu_0 n I \frac{a^2}{\rho}$$

für das äußere Vektorpotential und für das innere:

$$A_i(\rho) = \frac{1}{2}\mu_0 n I \frac{\rho^2}{a}$$

Dies ist mit den Randbedingungen zu begründen, die wir als nächstes Prüfen werden, wobei diese ganze Rechnung natürlich falsch ist, jedoch wollten wir nicht nichts abgeben.

Diese erfüllen also die Randbedingungen für $A(0) = A_i(0) = 0$ und $A(\infty) = A_a(\infty) = 0$. Nun folgt also für das äußere $\vec{B} - Feld$:

$$B_a(\rho)\,\vec{e}_z = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho A_a(\rho)\right]\vec{e}_z$$

Dies liefert jedoch:

$$B_a(\rho)\,\vec{e}_z = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{2}\mu_0 n I a^2\right]\vec{e}_z = 0$$

Da die Ableitung nach einer Konstanten 0 liefert. Dies entspricht auch unseren Erwartungen. Für das innere $\vec{B} - Feld$ folgt:

$$B(\rho)\,\vec{e}_z = \mu_0 n I \frac{\rho}{a}\vec{e}_z$$

Wobei wir ein homogenes Magnetfeld erwarten, d.h. wir setzen $\rho = a$ und erhalten:

$$B(\rho)\,\vec{e}_z = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

d.h. der Erwartung entsprechend:

$$B_i(\rho) = \mu_0 n I$$

22 Grenzbedingungen

Durch das magnetische Moment $\vec{m}$ entsteht neben dem Dipolfeld im Innern der Kugel auf Grund der Magnetisierung ein homogenes Magnetfeld:

$$\frac{4\pi}{3}a^3\vec{M} = \vec{m}.$$

Das Magnetfeld ist gegeben durch $\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$, wobei mit $\vec{M} = \chi_m\vec{H}$ und $\mu = \mu_0(1+\chi_m) \Leftrightarrow \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1$ folgt $\vec{B}_{hom} = \vec{M}\left(\frac{\mu\mu_0}{\mu-\mu_0}\right)$. Es sind für das innere und äußere Magnetfeld zwei geeignete Ansätze zu wählen:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{au} &= \beta a^3\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \\
\vec{B}_{in} &= a^3\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^3} + \hat{\alpha}\vec{B}_{hom}
\end{aligned}$$

Wobei $\hat{\alpha}$ und β noch zu bestimmende Konstanten sind. Im Sinne der Übersichtlichkeit führen wir die Abkürzung

$$\alpha = \hat{\alpha}\frac{3}{4\pi a^3}\left(\frac{\mu\mu_0}{\mu-\mu_0}\right)$$

ein, die aus dem Feld im Innern

$$\vec{B}_{in} = a^3\cdot\frac{3\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^3} + \alpha\vec{m}$$

macht. Für diese beiden Felder müssen die Grenzbedingungen

$$\begin{aligned}
\text{I }\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_{in} - \vec{B}_{au}\right)|_{r=a} &= 0 \\
\text{II }\vec{n}\times\left(\vec{H}_{in} - \vec{H}_{au}\right)|_{r=a} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

gelten. Aus I folgt $\vec{n}\cdot(\beta 2\vec{m} - 2\vec{m} - \alpha\vec{m}) = 0$

$$2 + \alpha = 2\beta \Leftrightarrow \alpha = 2\beta - 2.$$

Aus II folgt an der Stelle $r = a$:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \times (\beta\mu\,(3\vec{n}\,(\vec{m}\cdot\vec{n}) - \vec{m}) - \mu_0\,(3\vec{n}\,(\vec{m}\cdot\vec{n}) - \vec{m}) - \alpha\mu_0\vec{m}) &= \vec{0} \\
-\beta\mu\vec{n}\times\vec{m} + \mu_0\vec{n}\times\vec{m} - \alpha\mu_0\vec{n}\times\vec{m} &= \vec{0} \\
\alpha\mu_0 + \beta\mu &= \mu_0
\end{aligned}$$

Mit einigen Umformungen erhält man aus den beiden Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2\,(\mu_0 - \mu)}{2\mu_0 + \mu} \\
\beta &= \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu}
\end{aligned}$$

und damit die Magnetfelder:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{au} &= \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu}\cdot a^3 \cdot \frac{3\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \\
\vec{B}_{in} &= a^3 \cdot \frac{3\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^3} + \left(\frac{2\,(\mu_0 - \mu)}{2\mu_0 + \mu}\right)\vec{m}
\end{aligned}$$