Theoretische Physik III Übungszettel 7

Heiko Dumlich, Max Hoffmann

4. Juni 2006

18 Homogen magnetisierte Kugel

Wir betrachten eine Kugel vom Radius a mit der konstanten Magnetisierung $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$, die in einem nichtmagnetischen Medium eingebettet ist.

(a)

Es ist zu zeigen, dass das Vektorpotential folgende Form hat mit $\vec{A} = A_\varphi \vec{e}_\varphi$:

$$A_\varphi (\vec{x}) = \frac{\mu_0}{3} M_0 a^2 \frac{r_<}{r_>^2} \sin\theta$$

Wir nutzen den Ansatz:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left[\frac{\vec{J}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right]$$

wobei der erste Term wegfällt, da $\vec{J}(\vec{x})$ in diesem Fall verschwindet. Somit folgt:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Mit der Bedingung, dass nur innerhalb der Kugel eine Magnetisierung vorherrscht,also $\vec{M} = M_0 \Theta (a - r) \vec{e}_z$, wobei Θ die Stufenfunktion mit:

$$\Theta(a - r) = \begin{cases} 1 & r \leq a \\ 0 & sonst \end{cases}$$

definiert ist, folgt:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\nabla' \times \Theta(a - r') \vec{e}_z}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Berechnung des Kreuzprodukts liefert:

$$\nabla' \times \Theta\left(a - r'\right) \vec{e}_z = -\delta\left(a - r'\right) \frac{y'}{r'} \vec{e}_x + \delta\left(a - r'\right) \frac{x'}{r'} \vec{e}_y$$

Wir ersetzen x und y mit Kugelkoordinaten:

$$-\delta\left(a-r'\right)\frac{r'\sin\varphi'\sin\theta'}{r'}\vec{e}_x+\delta\left(a-r'\right)\frac{r'\cos\varphi'\sin\theta'}{r'}\vec{e}_y=\sin\theta'\delta\left(a-r'\right)\left(-\sin\varphi'\vec{e}_x+\cos\varphi'\vec{e}_y\right)$$

Mit $\vec{e}_\varphi=-\sin\varphi\vec{e}_x+\cos\varphi\vec{e}_y$, folgt somit:

$$\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0 M_0}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\sin\theta'\delta\left(a-r'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}\vec{e}_\varphi$$

Zudem können wir die Entwicklung:

$$\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l\left(\cos\gamma\right)$$

einsetzen und erhalten:

$$\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0 M_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\int d^3x'\,\sin\theta'\delta\left(a-r'\right)\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l\left(\cos\gamma\right)\vec{e}_\varphi$$

Wir können umformen und erhalten:

$$\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0 M_0}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^\infty dr'\,r'^2\delta\left(a-r'\right)\int d\Omega'\sin\theta'\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l\left(\cos\gamma\right)\left[-\sin\varphi\vec{e}_x+\cos\varphi\vec{e}_y\right]$$

Nun nutzen wir die Entwicklung:

$$P_l\left(\cos\gamma\right)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$$

um die Legendre Polynome in Kugelflächenfunktionen auszudrücken:

$$\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{\mu_0 M_0 a^2}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)\int d\Omega'\,\sin\theta'\left[-\sin\varphi\vec{e}_x+\cos\varphi\vec{e}_y\right]Y_{lm}^*\left(\theta',\varphi'\right)$$

Wir können nun $l=1$ setzen, da wir einen linearen sin im Ergebnis erhalten und die $\frac{r_<}{r_>^2}$ Abhängigkeit, was sonst nicht erreicht werden kann, bzw. da alle anderen Terme verschwinden. Somit folgt:

$$\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\sum_{m=-1}^{1}\frac{\mu_0 M_0 a^2}{3}\frac{r_<}{r_>^2}Y_{1m}\left(\theta,\varphi\right)\int d\Omega'\,\sin\theta'\left[-\sin\varphi\vec{e}_x+\cos\varphi\vec{e}_y\right]Y_{1m}^*\left(\theta',\varphi'\right)$$

Nun bleibt für das m nur die Möglichkeit die Werte $1, 0\,oder\,-1$ anzunehmen. Wir betrachten dies in **Aufgabe 19** etwas ausführlicher, daher wollen wir hier nur auf diese verweisen und gehen schnellen Schrittes weiter, wobei wir $m=0$ wegwerfen und erhalten:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 M_0 a^2}{3}\frac{r_<}{r_>^2}Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\int d\Omega'\,\sin\theta'\left[-\sin\varphi\vec{e}_x+\cos\varphi\vec{e}_y\right]Y_{1-1}^*\left(\theta',\varphi'\right)\\ &+ \frac{\mu_0 M_0 a^2}{3}\frac{r_<}{r_>^2}Y_{11}(\theta,\varphi)\int d\Omega'\,\sin\theta'\left[-\sin\varphi\vec{e}_x+\cos\varphi\vec{e}_y\right]Y_{11}^*\left(\theta',\varphi'\right)\end{aligned}$$

Wir setzen die Terme für die Kugelfunktionen von unten ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 M_0 a^2}{8\pi}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta e^{-i\varphi}\int d\Omega'\,\sin\theta'\left[-\sin\varphi\vec{e}_x+\cos\varphi\vec{e}_y\right]\sin\theta' e^{i\varphi'}\\ &+ \frac{\mu_0 M_0 a^2}{8\pi}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta e^{i\varphi}\int d\Omega'\,\sin\theta'\left[-\sin\varphi\vec{e}_x+\cos\varphi\vec{e}_y\right]\sin\theta' e^{-i\varphi'}\end{aligned}$$

Nun können wir weiter unter Verwendung der Eulerschen Identität ausrechnen, äquivalent zur **Aufgabe 19**:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 M_0 a^2}{8\pi}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta e^{-i\varphi}\left[\pi\vec{e}_y-i\pi\vec{e}_x\right]\int_0^\pi d\theta'\,\sin^3\theta'\\ &+ \frac{\mu_0 M_0 a^2}{8\pi}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta e^{i\varphi}\left[\pi\vec{e}_y+i\pi\vec{e}_x\right]\int_0^\pi d\theta'\,\sin^3\theta'\end{aligned}$$

Nun können wir noch die θ- Integration ausführen und erhalten:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 M_0 a^2}{6}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta e^{-i\varphi}\left[\vec{e}_y-i\vec{e}_x\right]\\ &+ \frac{\mu_0 M_0 a^2}{6}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta e^{i\varphi}\left[\vec{e}_y+i\vec{e}_x\right]\end{aligned}$$

Nun nutzen wir wiederum die Eulersche Identität und schreiben weiter um:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 M_0 a^2}{6}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta\left[\vec{e}_\varphi-i\left(\sin\varphi\vec{e}_y+\cos\varphi\vec{e}_x\right)\right]\\ &+ \frac{\mu_0 M_0 a^2}{6}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta\left[\vec{e}_\varphi+i\left(\sin\varphi\vec{e}_y+\cos\varphi\vec{e}_x\right)\right]\end{aligned}$$

Die imaginären Terme verschwinden, durch gegenseitiges auflösen und wir erhalten:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 M_0 a^2}{3}\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

Mit $\vec{A}=A_\varphi\vec{e}_\varphi$ folgt für den gesuchten Term:

$$A_\varphi(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{3}M_0 a^2\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta$$

was zu zeigen war.

(b)

Hier hilft der Ansatz:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Es gilt also:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\theta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)$$

Wobei wir das Vektorpotential für innen und außen aus Aufgabenteil **a** benutzen können:

$$\vec{A}\left(\vec{x}\right) = \frac{\mu_0}{3}M_0 a^2 \frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{3}M_0 a^2\frac{r_<}{r_>^2}\sin\theta\left(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y\right)$$

somit folgt:

$$\vec{A}_a\left(\vec{x}\right) = \frac{\mu_0}{3}M_0\frac{a^3}{r^2}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{A}_i\left(\vec{x}\right) = \frac{\mu_0}{3}M_0 r\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

Für die Komponenten folgt somit:

$$\begin{aligned} A_{a,r} &= 0 \\ A_{a,\theta} &= 0 \\ A_{a,\varphi} &= \frac{\mu_0}{3}M_0\frac{a^3}{r^2}\sin\theta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_{i,r} &= 0 \\ A_{i,\theta} &= 0 \\ A_{i,\varphi} &= \frac{\mu_0}{3}M_0 r\sin\theta \end{aligned}$$

also folgt für die magnetische Flußdichte $\vec{B}$:

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{3}M_0 a^3\left[\vec{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\right)\right) + \vec{e}_\theta\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\right)\right]$$

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{3}M_0\left[\vec{e}_r\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin^2\theta\right)\right) + \vec{e}_\theta\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\right)\right)\right]$$

Nun können wir differenzieren und weiter umformen, somit folgt für die magnetische Flussdichte innerhalb und außerhalb der Kugel:

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{3} M_0 \frac{a^3}{r^3} \left[\vec{e}_r 2\cos\theta + \vec{e}_\theta \sin\theta\right]$$

$$\vec{B}_i = \frac{2\mu_0}{3} M_0 \left[\vec{e}_r \cos\theta - \vec{e}_\theta \sin\theta\right]$$

19 Rotierende geladene Kugel

Wir betrachten eine Kugel vom Radius a mit einer homogenen Oberflächenladungsdichte σ. Diese rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch den Kugelmittelpunkt.

(a)

Es ist zu zeigen, dass die Ladungsstromdichte $\vec{j}\left(\vec{x}\right)$ gegeben ist durch:

$$\vec{j}\left(\vec{x}\right) = \sigma a \omega \sin\theta \delta\left(r-a\right) \vec{e}_\varphi \tag{1}$$

Wir betrachten die Definition für die Ladungsstromdichte:

$$\vec{j}\left(\vec{x}\right) = \rho\left(\vec{x}\right) \vec{v}\left(\vec{x}\right) \tag{2}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor gilt:

$$\vec{v}\left(\vec{x}\right) = \vec{\omega} \times \vec{x} = \omega a \sin\theta \vec{e}_\varphi \tag{3}$$

Während die Ladungsverteilung durch:

$$\rho\left(\vec{x}\right) = \sigma \delta\left(r-a\right) \tag{4}$$

beschrieben werden kann, da wir eine Kugel vom Radius a mit der homogenen Oberflächenladungsdichte σ betrachten. Nun fügen wir (3) und (4) in (2) ein, um:

$$\vec{j}\left(\vec{x}\right) = \sigma \delta\left(r-a\right) \omega a \sin\theta \vec{e}_\varphi$$

zu erhalten, wobei dies nach umstellen (1) entspricht, womit gezeigt wurde, dass dies die Ladungsstromdichte für dieses Problem ist.

(b)

Das Vektorpotential $\vec{A}\left(\vec{x}\right)$ ist innerhalb und außerhalb der Kugel zu bestimmen, wobei das Vektorpotential als:

$$\vec{A}\left(\vec{x}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{j}\left(\vec{x}'\right)}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}$$

definiert ist. Wir setzen (1) ein und entwickeln $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma)$, wobei $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$ und $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$, dies führt auf:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0\sigma\omega a}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int d^3x'\delta\left(r'-a\right) \sin\theta' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \left(-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y\right)$$

Nun nutzen wir die Entwicklung für das Legendre-Polynom:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*\left(\theta',\varphi'\right) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Einsetzen von dieser liefert:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0\sigma\omega a}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int d^3x'\delta\left(r'-a\right) \sin\theta' \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*\left(\theta',\varphi'\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) \left(-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y\right)$$

Nach Umformung:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_{m,l} \frac{\mu_0\sigma\omega a}{2l+1} Y_{lm}(\theta,\varphi) \int dr'\, r'^2 \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \delta\left(r'-a\right) \int d\Omega' \sin\theta' Y_{lm}^*\left(\theta',\varphi'\right) \left(-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y\right)$$

Wir wissen, dass wenn wir mit einem linearen sin eingehen, wir auch wieder diesen im Ergebnis erhalten müssen, daher müssen alle Terme $l \neq 1$ verschwinden (für die Legendre-Polynome), da $l = 0$ eine 1 liefert und $l > 1$ Terme höherer Ordnung liefern. Wir setzen also $l = 1$.

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_{m=-1}^{1} \frac{\mu_0\sigma\omega a}{3} Y_{1m}(\theta,\varphi) \int dr'\, r'^2 \frac{r_<}{r_>^2} \delta\left(r'-a\right) \int d\Omega' \sin\theta' Y_{1m}^*\left(\theta',\varphi'\right) \left(-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y\right)$$

Hierauf folgend müssen wir die drei Fälle für m betrachten. Hierbei kann $m = -1, 0, 1$ werden. Für die Kugelflächenfunktionen gilt:

$$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi}\, und\, Y_{1,-1}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta\, und\, Y_{10}^* = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}\, und\, Y_{11}^* = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi}$$

Wir können den $m = 0$ Term wegwerfen, da wir sonst keinen linearen $\sin\theta$-Term erhalten würden. Unter Verwendung der Eulerschen Identität $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ können wir einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0\sigma\omega a}{8\pi}\sin\theta e^{-i\varphi}\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\int d\Omega'\sin^2\theta'\left(\cos\varphi' + i\sin\varphi'\right)\left(-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y\right)\\ &+ \frac{\mu_0\sigma\omega a}{8\pi}\sin\theta e^{i\varphi}\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\int d\Omega'\sin^2\theta'\left(\cos\varphi' - i\sin\varphi'\right)\left(-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y\right)\end{aligned}$$

Jetzt können wir ausrechnen, wobei die gemischten Terme $\cos\varphi'\sin\varphi'$ wegfallen, da die Integration von 0 bis π für diese 0 liefert:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0\sigma\omega a}{8\pi}\sin\theta e^{-i\varphi}\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\int d\Omega'\sin^2\theta'\left(\cos^2\varphi'\vec{e}_y - i\sin^2\varphi'\vec{e}_x\right)\\ &+ \frac{\mu_0\sigma\omega a}{8\pi}\sin\theta e^{i\varphi}\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\int d\Omega'\sin^2\theta'\left(\cos^2\varphi'\vec{e}_y + i\sin^2\varphi'\vec{e}_x\right)\end{aligned}$$

Von hier aus können wir die Integration über φ' ausführen, dies liefert:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0\sigma\omega a}{8\pi}\sin\theta e^{-i\varphi}\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\int_0^\pi d\theta'\sin^3\theta'\left(\pi\vec{e}_y - i\pi\vec{e}_x\right)\\ &+ \frac{\mu_0\sigma\omega a}{8\pi}\sin\theta e^{i\varphi}\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\int_0^\pi d\theta'\sin^3\theta'\left(\pi\vec{e}_y + i\pi\vec{e}_x\right)\end{aligned}$$

Die θ' Integration führt auf:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0\sigma\omega a}{8\pi}\sin\theta e^{-i\varphi}\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\frac{4}{3}\pi\left(\vec{e}_y - i\vec{e}_x\right)\\ &+ \frac{\mu_0\sigma\omega a}{8\pi}\sin\theta e^{i\varphi}\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\frac{4}{3}\pi\left(\vec{e}_y + i\vec{e}_x\right)\end{aligned}$$

Nun können wir umformen und erhalten:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0\sigma\omega a}{6}\sin\theta\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)\left(\vec{e}_y - i\vec{e}_x\right)\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\\ &+ \frac{\mu_0\sigma\omega a}{6}\sin\theta\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\left(\vec{e}_y + i\vec{e}_x\right)\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\end{aligned}$$

Wenn wir dies umschreiben und ausnutzen, dass $\vec{e}_\varphi = \left(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y\right)$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0\sigma\omega a}{6}\sin\theta\left[\vec{e}_\varphi - i\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right)\right]\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\\ &+ \frac{\mu_0\sigma\omega a}{6}\sin\theta\left[\vec{e}_\varphi + i\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right)\right]\int dr'\, r'^2\frac{r_<}{r_>^2}\delta\left(r'-a\right)\end{aligned}$$

Hierbei zerstören sich die Terme $-i(\cos\varphi + \sin\varphi) + i(\cos\varphi + \sin\varphi) = 0$ und wir erhalten:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \sigma \omega a}{3} \sin\theta \vec{e}_\varphi \int dr'\, r'^2 \frac{r_<}{r_>^2} \delta\left(r' - a\right)$$

Wir zur Fallunterscheidung, wobei wir den Fall innerhalb $\vec{A}_i(\vec{x})$ $(r < a)$ und außerhalb $\vec{A}_a(\vec{x})$ $(r > a)$ der Kugel unterscheiden. Zuerst rufen wir uns die Defintion von $r_<$ und $r_>$ ins Gedächtnis, für diese gilt:

$$r_< = \begin{cases} r & a < r \\ r' & r < a \end{cases}$$

$$r_> = \begin{cases} r' & r > a \\ r & a > r \end{cases}$$

Somit folgt:

$$\vec{A}_a(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \sigma \omega a}{3} \sin\theta \vec{e}_\varphi \int dr'\, r'^2 \frac{r'}{r^2} \delta\left(r' - a\right)$$

$$\vec{A}_i(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \sigma \omega a}{3} \sin\theta \vec{e}_\varphi \int dr'\, r'^2 \frac{r}{r'^2} \delta\left(r' - a\right)$$

Wir lösen die Integrale für r' und erhalten:

$$\vec{A}_a(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{3} \frac{a^4}{r^2} \sin\theta \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{A}_i(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \sigma \omega a r}{3} \sin\theta \vec{e}_\varphi$$

(c)

Für die Magnetische Flußdichte $\vec{B}$ gilt:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Wir nutzen den Ansatz:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right) + \vec{e}_\theta \left(\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right)$$

für das äußere Potential gilt:

$$\begin{aligned} A_{a,r} &= 0 \\ A_{a,\theta} &= 0 \\ A_{a,\varphi} &= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{3} \frac{a^4}{r^2} \sin\theta \end{aligned}$$

für das innere Potential gilt:

$$\begin{aligned}
A_{i,r} &= 0 \\
A_{i,\theta} &= 0 \\
A_{i,\varphi} &= \frac{\mu_0 \sigma \omega a r}{3} \sin\theta
\end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch einsetzen und ausrechnen, es folgt also nach dem Einsetzen:

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 \sigma \omega a^4}{3} \left[\vec{e}_r \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2} \sin^2\theta \right) \right) + \vec{e}_\theta \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \sin\theta \right) \right) \right]$$

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0 \sigma \omega a}{3} \left[\vec{e}_r \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin^2\theta \right) \right) + \vec{e}_\theta \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\theta \right) \right) \right]$$

Berechnung der Differentiale und umformen, führt zu:

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{3} \frac{a^4}{r^3} \left[2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta \right]$$

$$\vec{B}_i = \frac{2\mu_0 \sigma \omega a}{3} \left[\vec{e}_r \cos\theta - \vec{e}_\theta \sin\theta \right]$$

Dies sind die magnetischen Flußdichten $\vec{B}$ innerhalb und außerhalb der Kugel.

(d)

Zu zeigen ist, dass sich außerhalb der Kugel das Feld eines magnetischen Dipols mit:

$$m = \frac{4\pi}{3} \sigma \omega a^4$$

beschreiben lässt. Hierzu betrachten wir die Formel für $\vec{B}(\vec{x})$:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3}$$

Als alternativen Weg können wir auch die Formel für $\vec{A}(\vec{x})$ betrachten:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Nun nutzen wir den Ansatz für $\vec{B}(\vec{x})$, es folgt, mit unserem Ergebnis aus **(c)**:

$$\vec{B}_a(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{3} \frac{a^4}{r^3} \left[2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta \right]$$

Mit $\vec{x} = r\vec{e}_r$ und $\vec{n} = \vec{e}_r$, somit folgt:

$$3\vec{e}_r\left(|m|\cos\theta\right)-\vec{m}=\frac{4\pi\sigma\omega a^4}{3}\left[2\cos\theta\vec{e}_r+\sin\theta\vec{e}_\theta\right]$$

Dies liefert, mit $\vec{e}_r = \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x+\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y+\cos\theta\vec{e}_z$ und $\vec{e}_\theta = \cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y-\sin\theta\vec{e}_z$:

$$2\vec{m}=\frac{4\pi\sigma\omega a^4}{3}\left[2\cos\theta\left(\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_x+\sin\varphi\sin\theta\vec{e}_y+\cos\theta\vec{e}_z\right)+\sin\theta\left(\cos\varphi\cos\theta\vec{e}_x+\sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y-\sin\theta\vec{e}_z\right)\right]$$

Umformung liefert:

$$2\vec{m}=\frac{4\pi\sigma\omega a^4}{3}\left[3\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x+3\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\vec{e}_y+\left(2\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\vec{e}_z\right]$$

Betrachten wir nun den Betrag, so folgt das gewünschte Ergebnis:

$$m=\frac{4\pi\sigma\omega a^4}{3}$$

Betrachten wir nun alternativ den Weg über das Vektorpotential:

$$\vec{A}\left(\vec{x}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{3}\frac{a^4}{r^2}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

Es folgt:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\left(m\,r\,\sin\theta\vec{e}_r\right)}{r^3}=\frac{\sigma\omega}{3}\frac{a^4}{r^2}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

Kürzen führt auf:

$$m\vec{e}_r=\frac{4\pi\sigma\omega a^4}{3}\vec{e}_\varphi$$

Nun betrachten wir noch den Betrag, es folgt, da der Betrag der Einheitsvektoren 1 liefert:

$$m=\frac{4\pi\sigma\omega a^4}{3}$$

Das gewünschte Ergebnis, wobei dieser Weg für dieses Problem effizienter, da schneller, erscheint.