Theoretische Physik III Übungszettel 6

Heiko Dumlich, Max Hoffmann

28. Mai 2006

15 Flächenladung

Wir betrachten eine Kugel des Radius a, mit der Flächenladung:

$$\sigma(a,\theta,\varphi) = \sigma_0 \sin^2\theta \cos 2\varphi \tag{1}$$

auf der Oberfläche der Kugel, wobei σ_0 eine Konstante darstellt. Wir bestimmen das Potential innerhalb und ausserhalb der Kugel. Für das Potential gilt mit dem allgemeinen Ansatz:

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Es gilt $\Delta\phi = 0$, da nur die Oberfläche der Kugel geladen ist und im restlichen Raum keine Ladung existiert. Wir unterscheiden die zwei Fälle des inneren Potentials ϕ_i und des äußeren Potentials ϕ_a mit den Ansätzen:

$$\phi_i = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\phi_a = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-(l+1)}\right]\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Der Innenraum muss ungeladen sein, da die Ladung nach aussen strebt, d.h. aber, dass im Ursprung das Potential nicht unendlich sein kann, da dort keine Ladung ist. Lassen wir jedoch $r \to 0$ laufen, so wird der $B_{lm}r^{-(l+1)}$ Term gegen "∞" streben, also muss $B_{lm} = 0$ sein. Für das äußere Potential folgt die Vereinfachung, dass $C_{lm} = 0$ gelten muss, da sonst im Unendlichen das Potential gegen "∞" streben würde. Somit erhalten wir die durch die Randbedingungen vereinfachten Ansätze:

$$\phi_i = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}r^l \cdot Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{2}$$

$$\phi_a = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} D_{lm} r^{-(l+1)} \cdot Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{3}$$

Nun gilt, da das Potential stetig sein muss an der Oberfläche der Kugel:

$$\phi_i(a,\theta,\varphi) = \phi_a(a,\theta,\varphi) \tag{4}$$

An der Kugeloberfläche kommt es zum Sprung der $\vec{r} - Komponente$ des $\vec{E} - Feldes$, somit gilt also:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial r}|_{a^-} - \frac{\partial \phi_a}{\partial r}|_{a^+} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{5}$$

Nun können wir nachdem wir (2) und (3) partiell nach r abgeleitet haben in (5) einsetzen und erhalten mit (1):

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[l A_{lm} r^{l-1} + (l+1) D_{lm} r^{-(l+2)} \right] \cdot Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_0 \sin^2\theta \cos 2\varphi$$

Nun finden wir für den Ausdruck $\sin^2\theta\cos 2\varphi = 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \left(Y_{22}(\theta,\varphi) + Y_{2,-2}(\theta,\varphi) \right)$, wobei $Y_{22}(\theta,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{i2\varphi}$, dies können wir nun einsetzen:

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[l A_{lm} a^{l-1} + (l+1) D_{lm} a^{-(l+2)} \right] \cdot Y_{lm}(\theta,\varphi) \\ = \\ \tfrac{1}{\epsilon_0} \sigma_0 2 \sqrt{\tfrac{2\pi}{15}} \left(Y_{22}(\theta,\varphi) + Y_{2,-2}(\theta,\varphi) \right) \end{gathered}$$

Nun können wir beide Seiten mit $Y^*_{l',m'}(\theta,\varphi)$ multiplizieren und über $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta$ integrieren und erhalten:

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[l A_{lm} a^{l-1} + (l+1) D_{lm} a^{-(l+2)} \right] \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta Y_{lm}(\theta,\varphi) Y^*_{l',m'}(\theta,\varphi) \\ = \\ \tfrac{1}{\epsilon_0} \sigma_0 2 \sqrt{\tfrac{2\pi}{15}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, \sin\theta \left(Y_{22}(\theta,\varphi) + Y_{2,-2}(\theta,\varphi) \right) Y^*_{l',m'}(\theta,\varphi) \end{gathered}$$

Nun können wir die Orthogonalitätsbedingung nutzen:

$$\int d\Omega \, Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$$

Somit folgt:

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[l A_{lm} a^{l-1} + (l+1) D_{lm} a^{-(l+2)} \right] \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \\ = \\ \tfrac{2\sigma_0}{\epsilon_0} \sqrt{\tfrac{2\pi}{15}} \left(\delta_{2,l'} \delta_{2,m'} + \delta_{2,l'} \delta_{-2,m'} \right) \end{gathered} \tag{6}$$

Nun vergleichen wir die Koeffizienten, mit (4) folgt:

$$A_{lm} = D_{lm} a^{-(2l+1)} \tag{7}$$

bzw.

$$D_{lm} = A_{lm} a^{2l+1} \tag{8}$$

Einsetzen von (7) in (6) liefert:

$$\begin{gathered} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} D_{lm} \left[l a^{-(2l+1)} a^{l-1} + (l+1)\, a^{-(l+2)} \right] \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \\ = \\ \tfrac{2\sigma_0}{\epsilon_0} \sqrt{\tfrac{2\pi}{15}} \left(\delta_{2,l'} \delta_{2,m'} + \delta_{2,l'} \delta_{-2,m'} \right) \end{gathered} \tag{9}$$

Hierbei erhalten wir nur ein D_{lm} für $l = l'$ und $m = m'$. Nun gilt jedoch, dass D_{lm} für alle $l' \neq 2$ eine 0 liefert, somit muss also $l = l' = 2$ gelten. Zudem erhalten wir eine 0 für alle Werte $m = m' \neq 2, -2$. Wir betrachten also die zwei Fälle $D_{2,-2}$ und $D_{2,2}$, für diese folgt mit (9) :

$$D_{2,-2} = \frac{2\sigma_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \frac{a^4}{5} \tag{10}$$

$$D_{2,2} = \frac{2\sigma_0}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \frac{a^4}{5} \tag{11}$$

Nun können wir (10) und (11) in (3) einsetzen und erhalten:

$$\phi_a = D_{2,2}\, r^{-3} \cdot Y_{2,2}(\theta, \varphi) + D_{2,-2}\, r^{-3} \cdot Y_{2,-2}(\theta, \varphi)$$

für das äußere Potential. Nun können wir dies noch explizit angeben, somit folgt:

$$\begin{aligned} \phi_a &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{a^4}{5} r^{-3} \sin^2\theta e^{i2\varphi} - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{a^4}{5} r^{-3} \sin^2\theta e^{-i2\varphi} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{a^4}{5} r^{-3} \sin^2\theta \left(\frac{e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi}}{2} \right) \end{aligned}$$

Mit $\cos 2\varphi = \left(\frac{e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi}}{2} \right)$ folgt nun:

$$\phi_a = \frac{\sigma_0}{5\epsilon_0} \frac{a^4}{r^3} \sin^2\theta \cos 2\varphi$$

Betrachten wir nun das innere Potential, wobei wir (8) in (6) einsetzen, um:

$$\begin{gathered} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} \left[l a^{l-1} + (l+1)\, a^{2l+1} a^{-(l+2)} \right] \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \\ = \\ \tfrac{2\sigma_0}{\epsilon_0} \sqrt{\tfrac{2\pi}{15}} \left(\delta_{2,l'} \delta_{2,m'} + \delta_{2,l'} \delta_{-2,m'} \right) \end{gathered} \tag{12}$$

zu erhalten. Wie für bereits das äußere Potential besprochen, brauchen wir nur die zwei Koeffizienten $A_{2,-2}$ und $A_{2,2}$ zu betrachten, da die anderen Koeffizienten alle verschwinden. Für diese zwei Koeffizienten folgt aus (12) :

$$A_{2,-2} = \frac{2\sigma_0}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\frac{1}{5a} \tag{13}$$

$$A_{2,2} = \frac{2\sigma_0}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\frac{1}{5a} \tag{14}$$

Nun führt (13) und (14) in (2) auf:

$$\phi_i = A_{2,2}\, r^2 \cdot Y_{2,2}\left(\theta,\varphi\right) + A_{2,-2}\, r^2 \cdot Y_{2,-2}\left(\theta,\varphi\right)$$

Setzen wir die expliziten Ausdrücke ein, so folgt:

$$\phi_i = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\frac{1}{5a} r^2 \sin^2\theta e^{2i\varphi} - \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\frac{1}{5a} r^2 \sin^2\theta e^{-2i\varphi}$$

dies können wir jedoch zu:

$$\phi_i = \frac{\sigma_0}{5\epsilon_0}\frac{r^2}{a}\sin^2\theta\left(\frac{e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}}{2}\right)$$

umformen. Somit gilt also für das innere Potential:

$$\phi_i = \frac{\sigma_0}{5\epsilon_0}\frac{r^2}{a}\sin^2\theta\cos 2\varphi$$

Für das innere und äußere Potential folgt mit der Herleitung von oben:

$$\phi_i\left(r,\theta,\varphi\right) = \frac{\sigma_0}{5\epsilon_0}\frac{r^2}{a}\sin^2\theta\cos 2\varphi$$

$$\phi_a\left(r,\theta,\varphi\right) = \frac{\sigma_0}{5\epsilon_0}\frac{a^4}{r^3}\sin^2\theta\cos 2\varphi$$

Wobei für das innere Potential $r < a$ und für das äußere Potential $r > a$ gelten muss, wodurch wir auch keine Unendlichkeit erhalten.

16 Dielektrikum

Wir betrachten zwei konzentrische leitende Kugeln vom Radius a bzw. b mit $b > a$. Auf diesen Kugeln befindet sich die Ladung $+Q$ bzw. $-Q$. Der Raum zwischen den Kugeln ist zur Hälfte mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten ϵ gefüllt.

(a)

Wir bestimmen das elektrische Feld $\vec{E} = -\nabla\phi$ zwischen den Kugeln, also für $a < r < b$. Wir benutzen den allgemeinen Ansatz:

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^{l} + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Da es sich um eine azimutale Symmetrie handelt, vereinfacht sich das Problem zu:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_{l}r^{l} + B_{l}r^{-(l+1)}\right]\cdot P_{l}(\cos\theta)$$

Da das Potential auf der Oberfläche der inneren und äußeren Kugelschale konstant sein muss, darf keine θ Abhängigkeit auftreten, dies ist jedoch nur der Fall für $l = 0$, da für $l \neq 0$ die Legendre-Polynome eine θ-Abhängigkeit besitzen. Somit folgt also:

$$\phi(r) = A_0 + \frac{B_0}{r}$$

Für das $\vec{E} - Feld$ folgt somit:

$$\vec{E} = B_0\frac{\vec{x}}{r^3}$$

Wobei nun noch der Koeffizient B_0 zu bestimmen ist. Nun gilt für die elektrische Verschiebung:

$$\vec{D} = \epsilon(\theta)\,\vec{E}$$

mit:

$$\epsilon(\theta) = \begin{cases}\epsilon_0 & mit\, -\pi \leq \theta < 0\\ \epsilon & mit\, 0 \leq \theta \leq \pi\end{cases}$$

wobei $\epsilon(\theta)$ die Winkelabhängigkeit der Konstanten angibt, wobei wir den Bereich mit und ohne Dielektrikum somit unterscheiden können. Somit gilt aber auch für die radiale Komponente:

$$D_r = \epsilon(\theta)\,\frac{B_0}{r^2}$$

Zwischen den Kugelschalen gilt nun aus $\int d^3x\,\nabla\cdot\vec{E} = \int d^3x\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon(\vec{x})} \Leftrightarrow \int d^3x\,\nabla\cdot\epsilon(\vec{x})\,\vec{E} = Q$:

$$\int d^3x\,\nabla\cdot\vec{D} = Q \Rightarrow \int d\Omega\,r^2 D_r = Q$$

Einsetzen von D_r liefert nun:

$$\int d\Omega\, B_0\epsilon\left(\theta\right) = Q \Leftrightarrow 2\pi B_0 \left(\epsilon_0 \int_{-1}^{0} d\cos\theta + \epsilon \int_{0}^{1} d\cos\theta\right) = Q$$

Somit folgt also für den Koeffizienten B_0 :

$$B_0 = \frac{Q}{2\pi\left(\epsilon + \epsilon_0\right)}$$

Nun können wir in unsere Gleichung für das elektrische Feld einsetzen und erhalten:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\left(\epsilon + \epsilon_0\right)} \frac{\vec{x}}{r^3}$$

Dies entspricht also:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi r^2\left(\epsilon + \epsilon_0\right)}\hat{r}$$

(b)

Um die Verteilung der Oberflächenladung auf der inneren Kugel zu bestimmen, unterscheiden wir die Fälle für den Bereich mit dem Dielektrikum und den Bereich ohne das Dielektrikum,wobei allgemein gilt:

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \frac{Q}{\epsilon\left(\vec{x}\right) S_+} = \frac{\sigma}{\epsilon\left(\vec{x}\right)}$$

Somit folgt, wenn wir die radiale Komponente betrachten und mit $\epsilon\left(\vec{x}\right)$ multiplizieren:

$$\epsilon E_r = D_r = \sigma$$

Nun folgt also mit $D_r = \epsilon\left(\theta\right) \frac{Q}{2\pi r^2\left(\epsilon + \epsilon_0\right)}$, für das Dielektrikum:

$$\sigma_\epsilon = \frac{Q\epsilon}{2\pi r^2\left(\epsilon + \epsilon_0\right)},\; mit\, 0 \leq \theta \leq \pi$$

und für das Vakuum:

$$\sigma_{\epsilon_0} = \frac{Q\epsilon_0}{2\pi r^2\left(\epsilon + \epsilon_0\right)},\; mit\; -\pi \leq \theta < 0$$

Dies sind die Oberflächenladung auf der inneren Kugel.

17 Fläche

(a)

Wir betrachten die von der ebenen Kurve C umschlossene Fläche $\vec{S}_C = S_C\vec{n}$, mit $\vec{n}$ der Flächennormalen, für diese soll gezeigt werden, dass:

$$\vec{S}_C = -\frac{1}{2}\oint_C d\vec{l} \times \vec{x}$$

gilt. Hierzu benutzen wir den Stokesschen Satz mit geeignetem $\vec{A}$, es gilt:

$$\oint_C d\vec{l} \times \vec{x} = \int_{S_C} \left(d\vec{S} \times \nabla\right) \times \vec{x}$$

aus dem allgemeinen Stokesschen Satz:

$$\int_{S_C} d\vec{S} \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{A}$$

Mit diesem Ansatz folgt im Komponentenschreibweise:

$$\int_{S_C} \left(d\vec{S} \times \nabla\right) \times \vec{x} = \int_{S_C} \epsilon_{ijk}\, dS_i \partial_j \left(\vec{e}_k \times \vec{x}\right) = \int_{S_C} \epsilon_{ijk}\, dS_i \partial_j \epsilon_{klm}\, x_l \vec{e}_m$$

Nun können wir umstellen und $\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ verwenden und erhalten:

$$\int_{S_C} \epsilon_{ijk}\, dS_i \partial_j \epsilon_{klm}\, x_l \vec{e}_m = \int_{S_C} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) dS_i \partial_j x_l \vec{e}_m$$

$$\Leftrightarrow \int_{S_C} dS_i \partial_j x_i \vec{e}_j - dS_i \partial_j x_j \vec{e}_i$$

Der erste Term verschwindet für alle Fälle $i \neq j$, während für den zweiten Term $\sum_{j=1}^{3} \partial_j x_j = 3$, gilt, somit folgt also:

$$\int_{S_C} \delta_{ij} dS_i \vec{e}_j - 3\, dS_i \vec{e}_i = \int_{S_C} dS_i \vec{e}_i - 3\, dS_i \vec{e}_i = -2 \int_{S_C} dS_i \vec{e}_i$$

Somit folgt also, wenn wir dies in unseren Ansatz einsetzen:

$$\oint_C d\vec{l} \times \vec{x} = \int_{S_C} \left(d\vec{S} \times \nabla\right) \times \vec{x} = -2 \int_{S_C} d\vec{S}$$

nun können wir noch mit $-\frac{1}{2}$ multiplizieren und die rechte Seite integrieren und erhalten:

$$\vec{S}_C = -\frac{1}{2}\oint_C d\vec{l} \times \vec{x}$$

was zu zeigen war.

(b)

Wir betrachten eine Ellipse mit den Halbachsen a und b mit $a > b$. Wir bestimmen die Fläche der Ellipse mit Zentrum im Ursprung, hierzu lösen wir das Linienintegral:

$$\oint (dy\,x - dx\,y)$$

wobei wir $x = a \cdot \cos\varphi$ und $y = b \cdot \sin\varphi$ als Parametrisierung wählen. Somit folgt $dx = -a \cdot \sin\varphi\, d\varphi$ und $dy = b \cdot \cos\varphi\, d\varphi$, wir setzen ein und erhalten:

$$\oint d\varphi\ \left(ab \cdot \cos^2\varphi + ab \cdot \sin^2\varphi\right)$$

Wir können ab, da es von φ unabhängig ist aus dem Integral ziehen und den trigonometrischen Pythagoras auf das Integral anwenden und erhalten:

$$ab \oint d\varphi$$

Nun gilt, wie in **(a)** gezeigt:

$$\left|\vec{S}_C\right| = \left|-\frac{1}{2}\oint_C \dots\right|$$

Also können wir auch schreiben, wobei $\oint = \int_0^{2\pi}$:

$$S_C = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

Also folgt für die Fläche der Ellipse:

$$S_C = \pi ab$$