Theoretische Physik III Übungszettel 5

Heiko Dumlich, Max Hoffmann

22. Mai 2006

12 Greensche Funktion II

Wir betrachten das elektrostatische Potential mit Dirichletscher Randbedingung auf der Oberfläche einer Hohlkugel mit Radius b.

(a)

Allgemein gilt für die Greensche Funktion:

$$G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + F(\vec{x}, \vec{x}')$$

wobei nach der Anwendung des Laplace-Operators:

$$\Delta G\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) = -4\pi\delta\left(\vec{x} - \vec{x}'\right)$$

folgt, also $\Delta F(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ gilt. Wir können nun den Ausdruck $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ entwickeln, wobei für diesen folgt:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l\left(\cos\gamma\right)$$

Dies lässt sich begründen indem wir den Fall von $\gamma = 0$ betrachten, somit sind $\vec{x}$ und $\vec{x}$' auf derselben Achse und es folgt:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rightarrow \frac{1}{|r - r'|}$$

Nun können wir mit den Definitionen:

$$r_< = \begin{cases} r & r < r' \\ r' & r' < r \end{cases}$$

$$r_> = \begin{cases} r' & r' > r \\ r & r > r' \end{cases}$$

unseren Term in einer Art Fallunterscheidung umformen zu:

$$\frac{1}{r_>}\frac{1}{\left(1-\frac{r_<}{r_>}\right)}=\frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l$$

Hierbei haben wir die Entwicklung für die geometrische Reihe mit $\frac{1}{1-q}=\sum q^n$ verwand. Für $\gamma \neq 0$ folgt nun:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l\left(\cos\gamma\right)$$

Betrachten wir nun unseren Fall der Hohlkugel, wobei wir mit der Dirichletschen Randbedingung bereits ein mächtiges Werkzeug an der Hand haben, dieses werden wir nun nutzen, da wir wissen, dass auf dem Rand die Greensche Funktion verschwinden muss. Aus den früheren Erfahrungen können wir den Ansatz:

$$G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}-\frac{b}{x'\left|\vec{x}-\frac{b^2}{x'^2}\vec{x}'\right|}$$

verwenden. Dieser folgt aus dem allgemeinen Ansatz für die Spiegelladung an einer Kugel über das verschwindende Potential auf der Kugeloberfläche, wobei allgemein gilt:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|}-\frac{q'}{|\vec{x}-\vec{y}'|}\right)$$

Für diesen Fall haben wir bereits $q'=-\frac{b}{y}q$ und $y'=\frac{b^2}{y}$ gefunden. Um nun auf die Greensche Funktion schließen zu können, setzen wir $q=4\pi\epsilon_0$ und erhalten nach Variablentransformation:

$$G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}-\frac{b}{x'\left|\vec{x}-\frac{b^2}{x'^2}\vec{x}'\right|}$$

Dies dient uns nun als Ansatz, für den ersten Term haben wir das Ergebnis bereits oben hergeleitet, nun betrachten wir den zweiten Term für den Fall $\gamma=0$, somit folgt für den zweiten Term:

$$\frac{b}{r'\left|r-\frac{b^2}{r'^2}r'\right|}=\frac{b}{r'\left|r-\frac{b^2}{r'}\right|}$$

Nun können wir wieder geschickt umformen und unsere Fallunterscheidung einsetzen um:

$$\frac{b}{b^2}\frac{1}{\left(1-\frac{r_<r_>}{b^2}\right)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<r_>}{b^2}\right)^l\frac{1}{b}=\sum_{l=0}^{\infty}r_<^l\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}$$

zu erhalten.Für $\gamma \neq 0$ folgt wieder:

$$\sum_{l=0}^{\infty} r_<^l \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} P_l(\cos\gamma)$$

Fügen wir nun noch unsere beiden hergeleiteten Terme zusammen, so folgt schließlich:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l P_l(\cos\gamma) - \sum_{l=0}^{\infty} r_<^l \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} P_l(\cos\gamma)$$

Ausklammern und zusammenfassen liefert somit das gesuchte Ergebnis von:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) P_l(\cos\gamma)$$

Dies ist die Greensche Funktion für unser Problem (für eine Hohlkugel).

Alternativ könnte man auch nach einer komplizierteren Herleitung für die Greensche Funktion für zwei konzentrische Kugeln in:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)}{(2l+1)\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

$a \to 0$ laufen lassen, daraus folgt für die Greensche Funktion:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) P_l(\cos\gamma)$$

Also das identische Ergebnis zu der einfacheren Herleitung über die Spiegelladungsmethode.

(b)

Es gilt allgemein für das elektrostatische Potential:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_S \phi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial n'} da'$$

Wir betrachten nun das Problem einer geladenen dünnen Scheibe mit Gesamtladung Q in dieser Hohlkugel, wobei die Scheibe einen Radius von $a < b$ besitzen soll. Diese Scheibe soll sich im Zentrum der Hohlkugel befinden. Zu bestimmen ist das Potential im Gebiet $a < r < b$. Die Ladungsverteilung der Scheibe ist gegeben durch:

$$\rho(\vec{x}) = Q \frac{\delta(\cos\theta')}{\pi a^2 r'} \Theta(a - r')$$

Zudem soll die Hohlkugel geerdet sein, d.h. also auf dem Rand ist das Potential $\phi(b) = 0$, somit folgt also für den Ansatz:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x'\,\rho\left(\vec{x}'\right)G\left(\vec{x},\vec{x}'\right)$$

nun können wir die Ladungsverteilung und die Greensche Funktion, welche im Aufgabenteil **a** hergeleitet wurde einsetzen und erhalten:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x'\,\frac{\delta\left(\cos\theta'\right)}{\pi a^2 r'}\Theta\left(a-r'\right)\sum_{l=0}^{\infty}r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)P_l\left(\cos\gamma\right)$$

Für $P_l\left(\cos\gamma\right)$ gilt $P_l\left(\cos\gamma\right)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$, dieses können wir einsetzen, wobei wir die azimutale Symmetrie des Problems ausnutzen, d.h. $m=0$, und schreiben können:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x'\,\frac{\delta\left(\cos\theta'\right)}{\pi a^2 r'}\Theta\left(a-r'\right)\sum_{l=0}^{\infty}r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)\frac{4\pi}{2l+1}Y_{l0}^*\left(\theta',\varphi'\right)Y_{l0}\left(\theta,\varphi\right)$$

wobei $Y_{l0}\left(\theta,\varphi\right)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l\left(\cos\theta\right)$ und somit auch $Y_{l0}^*\left(\theta',\varphi'\right)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l\left(\cos\theta'\right)$ gilt und somit folgt:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_V d^3x'\,\frac{\delta\left(\cos\theta'\right)}{\pi a^2 r'}\Theta\left(a-r'\right)r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)P_l\left(\cos\theta\right)P_l\left(\cos\theta'\right)$$

Nun liefert die Transformation in Kugelkoordinaten, wobei wir das Integral über φ und θ sofort lösen können, da wir dank der Delta-Funktion einen einfachen Ausdruck erhalten:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\int dr'\,\Theta\left(a-r'\right)r'r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)P_l\left(\cos\theta\right)P_l\left(0\right)$$

Wir können die Bedingung aus dem Hinweis benutzen, wonach alle ungeraden Legendre-Polynome verschwinden $P_{2l+1}\left(0\right)=0$ und für die geraden gilt $P_{2l}=\left(-1\right)^l\frac{(2l-1)!!}{2^l l!}$, also folgt für unseren Term:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\int dr'\,\Theta\left(a-r'\right)r'r_<^{2l}\left(\frac{1}{r_>^{2l+1}}-\frac{r_>^{2l}}{b^{4l+1}}\right)P_{2l}\left(\cos\theta\right)\left(-1\right)^l\frac{(2l-1)!!}{2^l l!}$$

Nun können wir noch $r_>=r$ und $r_<=r'$ ersetzen und erhalten:

$$\phi\left(\vec{x}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Q}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}dr'\,\Theta\left(a-r'\right)r'^{2l+1}\left(\frac{1}{r^{2l+1}}-\frac{r^{2l}}{b^{4l+1}}\right)P_{2l}\left(\cos\theta\right)\left(-1\right)^l\frac{(2l-1)!!}{2^l l!}$$

Nun folgt mit der Θ-Funktion eine Änderung der Grenzen des Integrals:

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\int_0^a dr'\, r'^{2l+1}\left(\frac{1}{r^{2l+1}} - \frac{r^{2l}}{b^{4l+1}}\right) P_{2l}(\cos\theta)\,(-1)^l\,\frac{(2l-1)!!}{2^l l!}$$

Nun können wir das Integrale berechnen und erhalten

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Q}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2l+2}a^{2l+2}\right)\left(\frac{1}{r^{2l+1}} - \frac{r^{2l}}{b^{4l+1}}\right) P_{2l}(\cos\theta)\,(-1)^l\,\frac{(2l-1)!!}{2^l l!}$$

Umformen liefert:

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{a^{2l}}{2(l+1)}\frac{(2l-1)!!}{2^l l!}\left(\frac{1}{r^{2l+1}} - \frac{r^{2l}}{b^{4l+1}}\right) P_{2l}(\cos\theta)$$

Nun können wir die Terme der Reihe entwickeln:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{b}\right) - \frac{a^2}{8}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{r^2}{b^5}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \ldots\right)$$

Dies ist das elektrostatische Potential, welches sich zwischen dem dünnen Scheibchen und der Hohlkugel, also zwischen a und b befindet.

13 Randwertproblem

Wir betrachten eine Hohlkugel vom Radius a, auf deren Oberfläche durch eine ausserhalb der Kugel liegende Ladungsverteilung ein Potential von:

$$\phi(a,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}\cos\theta$$

erzeugt wird. Wir wollen das Potential innerhalb der Kugel, d.h. $r < a$ bestimmen. Wir betrachten den allgemeinen Ansatz für dieses Problem mit:

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Da wir eine azimutale Symmetrie besitzen, vereinfacht sich das Problem weiter zu:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]\cdot P_l(\cos\theta)$$

Mit der Randbedingung, dass sich innerhalb der Kugel keine Ladung befindet, also auch im Ursprung ein endliches Potential herrschen muss, folgt, da für $r = 0$ der Term $\left(B_{lm}\cdot\frac{1}{r^{l+1}} \to \infty\right)$ gegen unendlich strebt, dass der Koeffizient $B_l = 0$ sein muss. Somit vereinfacht sich unser Ansatz zu:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \cdot P_l(\cos\theta)$$

Da unser Potential von aussen nur einen linearen cos besitzt, also nur in der ersten Potenz vorliegt, muss $l = 1$ sein.

Wir können unsere nur noch von θ abhängige Funktion $\phi(a,\theta,\varphi)$, da $a = const.$ mit:

$$\phi(a,\theta,\varphi) = A_1 a P_1(\cos\theta)$$

entwickeln. Wir setzen unser gegebenes Potential auf der Oberfläche ein und es gilt $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}\cos\theta = A_1 a\cos\theta$$

Somit folgt für den Koeffizienten A_1 :

$$A_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^2}$$

Wir setzen den Koeffizienten A_1 wiederum in unsere Formel für das Potential ein und es folgt:

$$\phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^2}\cdot\cos\theta$$

Dies ist das Potential innerhalb der Hohlkugel, mit $r < a$.

14 Multipolentwicklung

(a)

Wir betrachten den Zylinder vom Radius a mit der Höhe L und der Ladungsverteilung:

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \rho_0 & innerhalb\, des\, Zylinders \\ 0 & ausserhalb\, des\, Zylinders \end{cases}$$

Somit folgt also mit der Heavysidefunktion:

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0\Theta(a-r)\,\Theta\left(\frac{L}{2} - |z|\right)$$

wobei wir die Heaviside-Funktion mit:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

definieren. Für die Entwicklung bis zum Quadrupolmoment gilt:

$$\phi\left(\vec{x}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5}\right)$$

Für das "Monopolmoment", bzw. die Gesamtladung gilt:

$$q = \int d^3x'\,\rho\left(\vec{x}'\right)$$

Somit folgt nach Transformation in Zylinderkoordinaten und einsetzen unserer Ladungsverteilung:

$$q = \rho_0 \int_0^{\infty} dr\, r \cdot \Theta\left(a - r\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \Theta\left(\frac{L}{2} - |z|\right)$$

$$q = \rho_0 \int_0^{a} dr\, r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz$$

Auf Grund der Symmetrie ist das Problem von φ unabhängig und wir können es direkt integrieren, somit folgt nach zusätzlicher partiellen Integration:

$$q = 2\pi\rho_0 \left[z\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^a$$

Dies liefert nun:

$$q = \pi a^2 L \rho_0$$

Dies entspricht gerade:

$$q = V_{zylinder} \cdot \rho_0$$

Für das Dipolmoment gilt:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int d^3x'\,\rho\left(\vec{x'}\right)\vec{x'} \\ &\overset{p.I.}{=} q\vec{x} - q\int d^3x'\vec{\nabla}\cdot\vec{x} = 0 \end{aligned}$$

Für das Quadrupolmoment sind ein paar mehr (9) Terme zu untersuchen, da wir von kartesischen zu zylindrischen Koordinaten transformieren werden, gilt $r^2 = \rho^2 + z^2$, wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ und $\rho^2 = x^2 + y^2$, für die Terme des Quadrupolmomentes folgt somit:

$$Q_{ij} = \int d^3x'\left(3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\right)\rho\left(\vec{x'}\right) \Rightarrow Q_{ij} = Q_{ji}$$

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= \int d^3x' \left(3x_1'^2 - r'^2\right) \rho\left(\vec{x'}\right) \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho \left(3\rho^2 (\cos\varphi)^2 - \rho^2 - z^2\right) \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho^3 \left(3(\cos\varphi)^2 - 1\right) - 2\pi\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz\, z^2 \int_0^a d\rho\, \rho \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho\, \rho^3 \left[3\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) - \varphi\right]_0^{2\pi} - \pi\rho_0 a^2 \int_{-L/2}^{L/2} dz\, z^2 \\
&= \pi\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho\, \rho^3 - \pi\rho_0 a^2 \int_{-L/2}^{L/2} dz\, z^2 \\
&= \pi\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^a - \pi\rho_0 a^2 \left[\frac{1}{3} z^3\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{\pi\rho_0 a^4}{4} \int_{-L/2}^{L/2} dz - \pi\rho_0 a^2 \frac{1}{3}\frac{L^3}{4} \\
&= \pi\rho_0 L \frac{a^4}{4} - \pi\rho_0 L^3 \frac{a^2}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{22} &= \int d^3x' \left(3x_2'^2 - r'^2\right) \rho\left(\vec{x'}\right) \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho \left(3\rho^2 (\sin\varphi)^2 - \rho^2 - z^2\right) \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho^3 \left(3(\sin\varphi)^2 - 1\right) - 2\pi\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz\, z^2 \int_0^a d\rho\, \rho \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho\, \rho^3 \left[3\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right) - \varphi\right]_0^{2\pi} - \pi\rho_0 a^2 \int_{-L/2}^{L/2} dz\, z^2 \\
&= \pi\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho\, \rho^3 - \pi\rho_0 a^2 \int_{-L/2}^{L/2} dz\, z^2 \\
&= \pi\rho_0 L \frac{a^4}{4} - \pi\rho_0 L^3 \frac{a^2}{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{33} &= \int d^3x' \left(3x_3'^2 - r'^2\right) \rho\left(\vec{x'}\right) \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho \left(3z^2 - \rho^2 - z^2\right) \\
&= 2\pi\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a d\rho\, \rho \left(2z^2 - \rho^2\right) \\
&= 4\pi\rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz\, z^2 \int_0^a d\rho\, \rho - 2\pi\rho_0 L \int_0^a d\rho\, \rho^3 \\
&= 4\pi\rho_0 \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - 2\pi\rho_0 L \frac{a^4}{4} \\
&= 2\pi\rho_0 a^2 \frac{1}{12} L^3 - \frac{\pi}{2}\rho_0 L a^4 \\
&= \frac{\pi}{6}\rho_0 a^2 L^3 - \frac{\pi}{2}\rho_0 a^4 L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{12} &= \int d^3x'\, 3x_1' x_2' \rho\left(\vec{x'}\right) \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, 3r^3 \sin\varphi \cos\varphi \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a dr\, 3r^3 \left[\frac{\sin\varphi^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 = Q_{21}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{13} &= \int d^3x'\, 3x_1' x_3' \rho\left(\vec{x'}\right) \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, 3r^2 \cos\varphi z \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a dr\, 3r^2 \left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi} = 0 = Q_{31}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{23} &= \int d^3x'\, 3x_2' x_3' \rho\left(\vec{x'}\right) \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, 3r^2 \sin\varphi z \\
&= \rho_0 \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^a dr\, 3r^2 \left[-\cos\varphi\right]_0^{2\pi} = 0 = Q_{32}
\end{aligned}
$$

Wenn wir alles in die Formel für das Potential einsetzen, resultiert:

$$\begin{aligned}
\phi\left(\vec{x}\right) &= \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\frac{La^2}{|\vec{x}|} + \frac{1}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)}\left\{Q_{11}\frac{x_1^2}{|\vec{x}|^5} + Q_{22}\frac{x_2^2}{|\vec{x}|^5} + Q_{33}\frac{x_3^2}{|\vec{x}|^5}\right\} \\
&= \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\frac{La^2}{|\vec{x}|} + \frac{1}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)}\left\{\left(\pi\rho_0 L\frac{a^4}{4} - \pi\rho_0 L^3\frac{a^2}{12}\right)\frac{r^2\cos\varphi + r^2\sin\varphi}{|\vec{x}|^5} + \left(\frac{\pi}{6}\rho_0 a^2 L^3 - \frac{\pi}{2}\rho_0 a^4 L\right)\frac{z^2}{|\vec{x}|^5}\right\} \\
&= \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left[\frac{La^2}{|\vec{x}|} + \frac{r^2 - 2z^2}{|\vec{x}|^5}\left(\frac{La^4}{4} - \frac{L^3a^2}{12}\right)\right]
\end{aligned}$$

Im Potential ist also das Dipolmoment nicht erkennbar.

(b)

Wir betrachten den Ausdruck:

$$W = \int d^3x'\,\rho\left(\vec{x}'\right)\phi\left(\vec{x}'\right)$$

Wir werden zeigen, dass für die elektrostatische Energie in großer Entfernung des Zylinders die folgende asymptotische Form annimmt:

$$W = q\phi\left(0\right) - \vec{p}\cdot\vec{E}\left(0\right) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\frac{\partial E_i\left(0\right)}{\partial x_j}$$

Hierzu betrachten wir zuerst die Taylorentwicklung des Potentials um einen geeigneten Punkt, in diesem Falle wählen wir den Urspung 0, somit folgt:

$$\phi\left(\vec{x}\right) = \phi\left(0\right) + \vec{x}\cdot\nabla\phi\left(0\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j\frac{\partial\phi\left(0\right)}{\partial x_i\partial x_j}$$

Nun können wir die Beziehung $-\nabla\phi = \vec{E}$ einsetzen, nebenbei $\frac{1}{3}\cdot 3$ “ausklammern” und erhalten:

$$\phi\left(\vec{x}\right) = \phi\left(0\right) - \vec{x}\cdot\vec{E} - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} 3x_i x_j\frac{\partial E_i\left(0\right)}{\partial x_j}$$

Es gilt $W = q\phi\left(0\right) - q\phi\left(\infty\right)$, wobei in diesem Falle $\phi\left(\infty\right) = 0$ und somit können wir nachdem wir unsere Gleichung mit q multipliziert haben, schreiben:

$$W = q\phi\left(\vec{x}\right) = q\phi\left(0\right) - \vec{p}\cdot\vec{E} - \frac{q}{6}\sum_{i,j=1}^{3} 3x_i x_j\frac{\partial E_i\left(0\right)}{\partial x_j}$$

Unter der Annahme, dass $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ sei, d.h. dies nehmen wir aus der Sicht einer großen Entfernung an, können wir, da im Falle $i = j$ der Term $\frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j} = \nabla\cdot\vec{E} = 0$ liefert für unser W schreiben:

$$W = q\phi(0) - \vec{p}\cdot\vec{E} - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} q\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right)\frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j}$$

und fassen wir nun noch den Term $q\left(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}\right) = Q_{ij}$ zusammen, so erhalten wir:

$$W = q\phi(0) - \vec{p}\cdot\vec{E} - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j}$$

was zu zeigen war. Mit unserem Potenzial von Aufgabenteil **a**:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left[\frac{La^2}{|\vec{x}|} + \frac{r^2 - 2z^2}{|\vec{x}|^5}\left(\frac{La^4}{4} - \frac{L^3a^2}{12}\right)\right]$$

erhalten wir, wobei wir auf Grund der hohen Entfernung die Terme höherer Ordnung vernachlässigen können, also ein W mit:

$$W = q\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\frac{La^2}{|\vec{x_o}|}$$