Theoretische Physik III Übungszettel 4

Heiko Dumlich, Max Hoffman

14. Mai 2006

10 Spiegelladung II

Das Potential ϕ zweier unendlich ausgedehnter Linienladungsdichten λ und λ' in einem zylindrischen Koordinatensystem lautet:

$$\phi(r) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\lambda' \ln r_{\lambda'} + \lambda \ln r_\lambda\right]$$

wobei $r_\lambda = \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\vartheta}$ und $r_{\lambda'} = \sqrt{r^2 + h'^2 - 2rh'\cos\vartheta}$. Als Randbedingung muss das Potential bei einem Radius $r = a$ konstant sein, dass heißt auch unabhängig vom Winkel sein.

$$\partial_\vartheta \phi|_{r=a} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2rh'\lambda'\sin\vartheta}{r^2 + h'^2 - 2rh'\cos\vartheta} + \frac{2rh\lambda\sin\vartheta}{r^2 + h'^2 - 2rh\cos\vartheta}\right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow h'\lambda'\left(r^2 + h - 2rh\cos\vartheta\right) = -h\lambda\left(r^2 + h'^2 - 2rh'\cos\vartheta\right)$$

Der jeweils letzte Term unterscheidet sich nur durch λ' bzw. λ. Da die anderen Terme konstant sind und die Identität für jedes ϑ gelten muss, gilt $-\lambda = \lambda'$.

$$\Rightarrow h'\left(r^2 + h^2\right) = h\left(r^2 + h'^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2 + h'^2}{h'} = \frac{r^2 + h^2}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r^2}{h'} + h' = \frac{r^2}{h} + h$$

$$\Leftrightarrow r^2\left(\frac{1}{h'} - \frac{1}{h}\right) = h - h'$$

$$\Leftrightarrow r^2\left(h - h'\right) = \left(h - h'\right)hh'$$

$$\Rightarrow h' = \frac{r^2}{h}$$

Somit folgt für das Potential :

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a^2}{r_\lambda^2}\right)$$

11 Erweiterte Legéndre Polynome

11.1 u

Die gegebene Differentialgleichung

$$\left(1-x^2\right)P_l''-2xP_l'+l\,(l+1)\,P_l=0$$

ist m-mal abzuleiten. Dafür ist es nützlich zunächst kompakte Ausdrücke für die m-te Ableitung jedes auftretenden funktionalen Zusammenhangs zu bilden.

$$u\equiv\frac{d^m}{dx^m}P_l=P_l^{(m)}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left(xP_l\right) &= \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(1xP_l'+P_l\right)=\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}\left(2xP_l''+P_l'\right)=\frac{d^{m-3}}{dx^{m-3}}\left(3xP_l'''+P_l''\right)=\ldots\\ &= mxP_l^{(m)}+P_l^{(m-1)}\end{aligned}$$

Der xP_l Ausdruck ist etwas schwieriger zu finden.

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(x^2P_l\right) = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(2xP_l+x^2P_l'\right)=\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}\left(2P_l+4xP_l'+x^2P_l''\right)$$

$$\frac{d^{m-3}}{dx^{m-3}}\left(6P_l+6xP_l'+x^2P_l''\right)=\frac{d^{m-4}}{dx^{m-4}}\left(12P_l+8xP_l'+x^2P_l''\right)$$

Der Koeffizient bei dem 2. Term erhöht sich bei jeder Ableitung um 2. Der 1. Koeffizient erhöht sich bei jeder Ableitung um den vorherigen 2. Koeffizienten. Als rekursive Definition könnte man für die Koeffizientenfolge daher auch schreiben:

$$a_0=0;\;\; a_n=2n+a_{n-1}$$

$$a_n=2n+a_{n-1}=2n+2\,(n-1)+a_{n-2}=2n+2\,(n-1)+2\,(n-2)+a_{n-3}=\ldots$$

Durch ein paar Umformungen findet man auch einen geschlossen Ausdruck:

$$a_n=2n^2-2\sum_{i=0}^{n}i=2n^2-2\frac{1}{2}n\,(n-1)=2n^2-n^2-n=n\,(n-1)\,.$$

$$\Rightarrow\frac{d^m}{dx^m}\left(x^2P_l\right)=m\,(m-1)\,P_l^{(m-2)}-2xP_l^{(m-1)}+x^2P_l^{(m)}.$$

Leitet man obige Gleichung wie erläutert m-mal ab, bleibt die rechte Seite nach wie vor 0 und man erhält:

$$\begin{aligned}0 &= u''-m\,(m-1)\,u-2mxu'-x^2u''-2\left[mu+xu'\right]\\ &= u''\left(1-x^2\right)-u'2x\,(m+1)+u\left(l^2+l-m^2-m\right)\\ &= u''\left(1-x^2\right)-u'2x\,(m+1)+u\,(l-m)\,(l+m+1)\,\checkmark\end{aligned}$$

11.2 v

Die zugeordneten LEGÉNDREschen Polynome sind die definiert als $v = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{m/2} u$. Um die Gültigkeit des Ansatzes zu überprüfen sind zuerst v' und v'' zu bilden und in die Gleichung

$$0 = \left(1-x^2\right) v'' - 2xv' + \left[l\,(l+1) - \frac{m}{1-x^2}\right]$$

einzusetzen.

$$\begin{aligned}
\frac{v}{(-1)^m \left(1-x^2\right)^{m/2}} &= u \\
\frac{v'}{(-1)^m \left(1-x^2\right)^{m/2}} &= u' - u \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2} \\
\frac{v''}{(-1)^m \left(1-x^2\right)^{m/2}} &= u'' - u' \cdot \frac{2mx}{1-x^2} + u \cdot \frac{2mx^2\,(m/2-1)}{\left(1-x^2\right)^2}
\end{aligned}$$

Nun gilt es nur noch einzusetzen und auszurechnen.

$$\begin{aligned}
0 &= \left(1-x^2\right)\left[u'' - u' \cdot \frac{2mx}{1-x^2} + u \cdot \frac{2mx^2\,(m/2-1)}{\left(1-x^2\right)^2}\right] \\
&\quad -2x\left[u' - u \cdot \frac{m}{2}\frac{x}{1-x^2}\right] + \left[l\,(l+1) - \frac{m}{1-x^2}\right] u \\
0 &= \left(1-x^2\right) u'' - u' 2x\,(m+1) \\
&\quad +u\left[l\,(l+1) - m \cdot \frac{mx^2 - 2x^2 + 1 + x^2 + m}{1-x^2}\right] \\
0 &= \left(1-x^2\right) u'' - 2x\,(m+1)\,u' + \left[l\,(l+1) - m^2 - m\right] u \\
0 &= \left(1-x^2\right) u'' - 2x\,(m+1)\,u' + (l-m)\,(l+m+1)\,u
\end{aligned}$$

Man erhält wieder die Zwischengleichung. Dadurch wurde gezeigt, dass der Ansatz der zugeordneteten LEGÉNDREpolynome die erweiterte LEGÉNDREsche Differentialgleichug erfüllt.