Übungen zur Theoretischen Physik III, Elektrodynamik - Blatt 3

Heiko Dumlich und Max Hoffmann

8. Mai 2006

7 Spiegelladung

(a)

Wir bestimmen die auf der Kugeloberfläche induzierte Ladungsdichte σ. Für das Potential gilt $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_q}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_{q'}}|}\right)$. Die Kugel ist geerdet, also gilt $\phi(r=a)=0$. Hieraus folgt :

$$\phi(r=a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_q}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_{q'}}|}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(\frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_q}|} + \frac{q'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x_{q'}}|}\right)$$

Durch einsetzen der Beziehungen, die wir aus unserer Graphik (z.B. siehe Vorlesung/Jackson) erhalten, folgt :

$$0 = \left(\frac{q}{|a\mathbf{e_r} - r_q\mathbf{n}|} + \frac{q'}{|a\mathbf{e_r} - r_{q'}\mathbf{n}|}\right)$$

Hieraus erhalten wir nach herausziehen von a bzw. $r_{q'}$:

$$0 = \left(\frac{q}{a|\mathbf{e_r} - \frac{r_q}{a}\mathbf{n}|} + \frac{q'}{r_{q'}|\frac{a}{r_{q'}}\mathbf{e_r} - \mathbf{n}|}\right)$$

Aus dieser Gleichung finden wir sofort die Beziehung : $\frac{q}{a} = -\frac{q'}{r_{q'}}$, die die Gleichung erfüllt. Umstellen liefert $\frac{a}{r_{q'}} = -\frac{q}{q'}$. Als zweite Beziehung erhalten wir noch, wenn wir r_q und a herausziehen : $\frac{q}{r_q} = -\frac{q'}{a}$, hiermit folgt nach umstellen $\frac{r_q}{a} = -\frac{q}{q'}$, somit folgt also insgesamt : $\frac{a}{r_{q'}} = \frac{r_q}{a} \Leftrightarrow r_{q'} = \frac{a^2}{r_q}$ und $q' = -\frac{a}{r_q}q$.

Für die induzierte Ladungsdichte gilt nun $\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}|_{r=a}$:
Wir leiten das Potential nach r ab und erhalten :

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r}|_{r=a} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|r\mathbf{e_r} - r_q \mathbf{n}|} + \frac{q'}{|r\mathbf{e_r} - r_{q'}\mathbf{n}|} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r}|_{r=a} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos\gamma}} - \frac{\frac{a}{r_q}}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{r_q^2} - 2r\frac{a^2}{r_q}\cos\gamma}} \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r}|_{r=a} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos\gamma}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r_q^2 r^2}{a^2} + a^2 - 2rr_q\cos\gamma}} \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{q}{4\pi} \left(-\frac{1}{2} \frac{2r - 2r_q\cos\gamma}{\left(r^2 + r_q^2 - 2rr_q\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{2r_q^2 r}{a^2} - 2r_q\cos\gamma}{\left(\frac{r_q^2 r^2}{a^2} + a^2 - 2rr_q\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \right)_{r=a}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{-a + r_q\cos\gamma}{\left(a + r_q^2 - 2ar_q\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{r_q^2 a}{a^2} - r_q\cos\gamma}{\left(r_q^2 + a^2 - 2ar_q\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{a}{r_q} \right) \frac{\left(1 - \frac{a^2}{r_q^2}\right)}{\left(1 + \frac{a^2}{r_q^2} - 2\frac{a}{r_q}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Somit folgt für die gesamte induzierte Ladung nach Integration über die Kugeloberfläche $\left(\int dA_{Kugel} = a^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \right)$:

$$Q_{ges} = \int dA \, \sigma = a^2 \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \sigma$$

Wir setzen σ ein und erhalten :

$$Q_{ges} = -\frac{q}{4\pi a^2} 2\pi a^2 \left(\frac{a}{r_q} \right) \left(1 - \frac{a^2}{r_q^2} \right) \int_0^\pi d\theta \, \sin\theta \, \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{r_q^2} - 2\frac{a}{r_q}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Wir substituieren $\theta = \cos\theta$ und erhalten :

$$Q_{ges} = -\frac{q}{2} \left(\frac{a}{r_q} \right) \left(1 - \frac{a^2}{r_q^2} \right) \int_{-1}^{1} d\cos\theta \, \frac{\sin\theta}{\sin\theta} \, \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{r_q^2} - 2\frac{a}{r_q}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Nun substituieren wir $x = 1 + \frac{a^2}{r_q^2} - 2\frac{a}{r_q}\cos\theta$ somit folgt :

$$Q_{ges} = -\frac{q}{2}\left(\frac{a}{r_q}\right)\left(1 - \frac{a^2}{r_q^2}\right)\int_{1+\frac{a^2}{r_q^2}+2\frac{a}{r_q}}^{1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}} dx\, x^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{r_q}{2a}\right)$$

Wir stellen um und integrieren :

$$Q_{ges} = \frac{q}{4}\left(1 - \frac{a^2}{r_q^2}\right)\left[-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right]_{1+\frac{a^2}{r_q^2}+2\frac{a}{r_q}}^{1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}}$$

Wir setzen die Grenzen ein und erhalten (nebenbei ziehen wir aus den Wurzeln den Faktor $\frac{1}{r_q}$ heraus) :

$$Q_{ges} = -\frac{q}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r_q^2}\right) r_q \left[\frac{1}{\left(r_q^2 + a^2 - 2ar_q\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(r_q^2 + a^2 + 2ar_q\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Nun führen wir ein paar Umformungen durch :

$$Q_{ges} = -\frac{q}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r_q^2}\right) r_q \left[\frac{1}{(r_q - a)} - \frac{1}{(r_q + a)}\right]$$

$$Q_{ges} = -\frac{q}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r_q^2}\right) r_q \left[\frac{(r_q + a) - (r_q - a)}{(r_q - a)\cdot(r_q + a)}\right]$$

$$Q_{ges} = -\frac{q}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r_q^2}\right) r_q \left[\frac{2a}{r_q^2\left(1 - \frac{a^2}{r_q^2}\right)}\right]$$

Und erhalten das erwartete Ergebnis, dass die gesamte Ladung der Spiegelladung entspricht :

$$Q_{ges} = -q\frac{a}{r_q}$$

(b+c)

Wir zeigen, dass die Kraft auf ein Flächenelement da der Kugeloberfläche proportional zu σ^2ist. Wir betrachten die Energiedichte in der Nähe der Kugeloberfläche : $w = \epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$. Es gilt $dF = \frac{dE}{dr}$, aus $W = \int dr\, F$. Während die Energiedichte die Energie über das gesamte Volumen ist : $w = \frac{dE}{dV} = \frac{dE}{dr} \cdot \frac{1}{dA}$. Somit folgt : $w = dF \cdot \frac{1}{dA} \Leftrightarrow F = w \cdot dA$. Da für die Energiedichte jedoch auch $w = 2\pi\sigma^2$ gilt, folgt somit : $dF = 2\pi\sigma^2 dA$. Somit ist gezeigt, dass F proportional zu σ^2 ist. Um nun F zu erhalten, integrieren wir, wobei die Kraft senkrecht auf der Kugel steht ($\cos\gamma$) und somit erhalten wir ($\int dA_{Kugel} = a^2 \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi = a^2 \int d\Omega$):

$$F = \frac{q^2}{8\pi a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^2\int d\Omega \frac{\cos\gamma}{\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}\cos\gamma\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^2}{4a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^2\int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta\cdot\cos\theta}{\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}\cos\theta\right)^3}$$

Substitution von $\theta = \cos\theta$ liefert :

$$F = \frac{q^2}{4a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^2\int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{\cos\theta}{\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}\cos\theta\right)^3}$$

Integration mit maple liefert wie erwartet :

$$F = \frac{q^2 a r_q}{(a-r_q)^2(a+r_q)^2} = \frac{q^2 a}{r_q^3}\cdot\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^{-2} = \frac{q^2}{a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^3\cdot\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^{-2}$$

Um dies "von Hand" nachzuweisen, substituieren wir $x = 1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}\cos\theta$ und erhalten mit $\cos\theta = \left(x-1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)\left(\frac{1}{-2\frac{a}{r_q}}\right)$ und $\frac{dx}{d\cos\theta} = -2\frac{a}{r_q} \Leftrightarrow d\cos\theta = dx\left(\frac{1}{-2\frac{a}{r_q}}\right)$:

$$F = \frac{q^2}{4a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^2\int_{1+\frac{a^2}{r_q^2}+2\frac{a}{r_q}}^{1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}} dx \frac{\left(x-1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)}{x^3}\cdot\left(\frac{r_q^2}{4a^2}\right)$$

Nun lösen wir die Integrale :

$$F = \frac{q^2}{4a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^2\left(\frac{r_q^2}{4a^2}\right)\cdot\int_{1+\frac{a^2}{r_q^2}+2\frac{a}{r_q}}^{1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}} dx\left(x^{-2}-x^{-3}-\frac{a^2}{r_q^2}x^{-3}\right)$$

Wir betrachten die drei Integrale einzeln :

$$\int_{1+\frac{a^2}{r_q^2}+2\frac{a}{r_q}}^{1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}} dx\,\frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1+\frac{a^2}{r_q^2}+2\frac{a}{r_q}}^{1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}} = r_q^2\left[\frac{1}{(r_q+a)^2}-\frac{1}{(r_q-a)^2}\right] = -\frac{4}{\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^2}\cdot\frac{a}{r_q}$$

$$\int_{1+\frac{a^2}{r_q^2}+2\frac{a}{r_q}}^{1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}} dx\left(-x^{-3}\right) = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{1+\frac{a^2}{r_q^2}+2\frac{a}{r_q}}^{1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}} = \frac{4}{\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^3\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}\right)^4}\cdot\frac{a}{r_q}$$

$$\int_{1+\frac{a^2}{r_q^2}+2\frac{a}{r_q}}^{1+\frac{a^2}{r_q^2}-2\frac{a}{r_q}} dx\left(-\frac{a^2}{r_q^2}x^{-3}\right) = \frac{4}{\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^3\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}\right)^4}\cdot\frac{a^3}{r_q^3}$$

Wir fügen die Terme wieder zusammen und erhalten :

$$F = \frac{q^2}{4a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^3\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^2\left(\frac{r_q^2}{4a^2}\right)\left[-\frac{4}{\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^2}+\frac{4}{\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^3\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}\right)^4}+\frac{4\frac{a^2}{r_q^2}}{\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^3\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}\right)^4}\right]$$

Wir formen um und erhalten :

$$F = \frac{q^2}{a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^3\left[\frac{\left(-\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}\right)^4+1\right)\frac{r_q^2}{a^2}+1}{4\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}\right)^4}\right]$$

Nach Berechnungen folgt (wenn wir uns nicht verrechnet haben, was bei den vielen Termen aber leider vermutlich irgendwo passiert ist):

$$F = \frac{q^2}{a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^3\left[\frac{1}{4\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)}-\frac{(a^2+r_q^2)^2-r_q^2\left(2r_q^2-a^2\right)}{4\left(r_q^2+a^2\right)^2\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{r_q^2}\right)}\right]$$

Während wir :

$$F = \frac{q^2}{a^2}\left(\frac{a}{r_q}\right)^3\left(1-\frac{a^2}{r_q^2}\right)^{-2}$$

erwartet haben. Dies zeigt, dass vermutlich ein Fehler in der Rechnung ist, wobei dies ein Flüchtigkeitsfehler sein kann, leider waren wir nicht in der Lage den Fehler zu finden. Zumindest scheint bis zur Substitution der Term korrekt zu sein, da Integration mit maple auf das richtige Ergebnis führt.

8 GREENsche Funktion

(a)

Wir betrachten die Randbedingungen mit $G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x},\mathbf{x}') = 0$ für $z' = 0$. Somit folgt für die GREENsche Funktion :

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\overline{\mathbf{x}}-\mathbf{x}'|}$$

Mit $\overline{\mathbf{x}} := (x,y,-z)$ und $\mathbf{x} := (x,y,z)$.

(b)

Für das Potential außerhalb bzw. auf dem Rand des Kreises gilt $\phi(\mathbf{x}) = 0$, während für das Potential innerhalb des Kreises $\phi(\mathbf{x}) = V$ gilt. Da wir den Ladungsfreien Halbraum $z \geq 0$ betrachten gilt $\rho(\mathbf{x}) = 0$, somit folgt also :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dx' \, \rho(\mathbf{x}') \, G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \frac{1}{4\pi} \oint_S da' \, \phi(\mathbf{x}') \, \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'}$$

Nun setzen wir unsere bereits oben erwähnten Randbedingungen ein, wobei wir nur $r < a$ betrachten, da ausserhalb von a immer $\phi = 0$ ist. Es folgt :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{V}{4\pi} \int dA \, \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'}$$

Einsetzen der GREENschen Funktion aus **(a)** liefert :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{V}{4\pi} \int dx \int dy \, \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}'|} \right)$$

Dies entspricht :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{V}{4\pi} \int dr \, r \int d\varphi \, \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Hieraus folgt nach Ableiten nach z' :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{V}{4\pi} \int dr \, r \int d\varphi \left(\frac{(z-z')}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(z+z')}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Wir setzen $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$ und erhalten unser $\phi(r, \varphi, z)$ in Zylinderkoordinaten :

$$\phi(r, \varphi, z) = \frac{V}{4\pi} \int dr' \, r' \int d\varphi \left(\frac{(z-z')}{\left((r-r')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(z+z')}{\left((r-r')^2 + (z+z')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

(c)

Nun betrachten wir den Fall des Potentials auf der Kreisachse $(r = 0)$ und $(z' = 0)$, somit folgt :

$$\phi(r, \varphi, z) = \frac{V}{4\pi} \int dr' \, r' \int d\varphi \, z \left(\frac{1}{(r'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(r'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\phi\left(r,\varphi,z\right)=\frac{V}{4\pi}\int_0^a dr'\,r'\int_0^{2\pi}d\varphi\,z\left(\frac{2}{\left(r'^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\phi\left(r,\varphi,z\right)=V\int_0^a dr'\left(\frac{r'z}{\left(r'^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Somit folgt dann :

$$\phi\left(r,\varphi,z\right)=V\left[-\frac{z}{\left(r'^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^a=V\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

9 Trennnung der Variablen

(a)

Wir nutzen Zylinderkoordinaten, wobei wir $(z=0)$ wählen und somit gilt $\phi=\phi\left(r,\varphi\right)$. Für den LAPLACEschen Operator in Zylinderkoordinaten gilt :

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Da wir $z=const.=0$ gewählt haben, folgt in diesem Fall :

$$\nabla^2\phi\left(r,\varphi\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

Wir wählen den Ansatz $\phi\left(r,\varphi\right)=R\left(r\right)Q\left(\varphi\right)$ und kürzen durch $\frac{r^2}{\phi(r,\varphi)}$, somit folgt :

$$0=\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2}$$

Wir wählen, da die Funktionen jede für sich von r bzw. φ abhängen die Konstante :

$$m^2=\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)$$

$$-m^2=\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial\varphi^2}$$

Ansatz für R : $R=r^\alpha$; $R'=\alpha r^{\alpha-1}$; $R''=\alpha\left(\alpha-1\right)r^{\alpha-2}$

$$\Rightarrow r\alpha r^{\alpha-1}+r^2\alpha\left(\alpha-1\right)r^{\alpha-2}=m^2r^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha r^\alpha+\alpha\left(\alpha-1\right)r^\alpha=m^2r^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \alpha^2 - \alpha = m^2 \Rightarrow \alpha = \pm m$$

Ansatz für Q : $Q = e^{ia\varphi}$; $Q' = i\alpha e^{ia\varphi}$; $Q'' = -\alpha^2 e^{ia\varphi} \Rightarrow -\alpha^2 = -m^2 \Rightarrow \alpha = \pm m$
Somit folgt :

$$R(r) = c_m \cdot r^{-m} + d_m \cdot r^m$$

$$Q(\varphi) = a_m \cdot \cos(m\varphi) + b_m \cdot \sin(m\varphi)$$

Für den Spezialfall, dass $m = 0$ ist folgt :

$$\frac{1}{R}\left[rR' + r^2 R''\right] = 0$$

Ansatz für R : $R = \ln\alpha$; $R' = \frac{1}{\alpha}$; $R'' = -\frac{1}{\alpha}$

$$\frac{1}{\ln\alpha}\left[\frac{r}{\alpha} + r^2\frac{-1}{\alpha^2}\right] = 0$$

$$\overset{\alpha\neq 1}{\Rightarrow} \frac{r}{\alpha} = \frac{r^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow r = \pm\alpha \text{ (1. Lösung)}$$

oder 2. Lösung $R = const.$: $R = c_0 \ln r + d_0$.

$$\frac{1}{Q}Q'' = 0 \Rightarrow Q = g_0\varphi + h_0$$

Somit folgt also :

$$R(r) = c_0 \ln r + d_0$$

$$Q(\varphi) = a_0 + b_0\varphi$$

Somit folgt für die allgemeine Lösung der LAPLACEschen Gleichung durch Zusammenfügen der Einzelergebnisse:

$$\phi(r,\varphi) = R(r)\,Q(\varphi) = c_0 \ln r + d_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(c_m \cdot r^{-m} + d_m \cdot r^m\right)\left(a_m \cdot \cos(m\varphi) + b_m \cdot \sin(m\varphi)\right)$$

(b)

Wir betrachten das elektrostatische Potential eines leitenden Zylinders mit Radius a, der in ein elektrisches Feld $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{x}}$ gebracht wird. Das Potential auf der Zylinderoberfläche ist bei verschwindender Gesamtladung konstant ($V \neq 0$). Wir betrachten die allgemeine Form der zwei dimensionalen LAPLACEschen Gleichung in Zylinderkoordinaten :

$$\phi(r,\varphi) = c_0 \ln r + d_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(c_m r^m + d_m r^{-m}\right)\left(a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\right)$$

Innerhalb befindet sich keine Ladung, daher muss gelten $d_m = 0$ für alle m.

$$\phi\,(r, \varphi) = c_0 \ln r + d_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m r^m \left(a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\right)$$

An der Oberfläche des Leiter ($r = a$) ist das Potential konstant ($\phi\,(a, \varphi) = V \neq 0$), also muss für die Ableitung an der Stelle $r = a$: $\nabla_{r,\varphi}\phi = 0$ ergeben :

$$\nabla_{r,\varphi}\phi|_{r=a} = \frac{c_0}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m a^{m-2} m \left(b_m \cos m\varphi - a_m \sin m\varphi\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus folgt $c_0 = 0$, $a_m = -\sin m\varphi$ und $b_m = \cos m\varphi$ (oder $c_m = 0$), dies macht Sinn, da eine Winkelabhängigkeit bei einem symmetrischen Problem sinnlos erscheint.

$$\phi\,(r, \varphi) = d_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m r^m = V$$

Als nächstes betrachten wir $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. In Zylinderkoordinaten lautet der Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r}\vec{e}_\varphi \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z$.

$$\vec{E} = -\sum_{m=2} m c_m r^m \vec{e}_r \frac{1}{r} = E_0 \hat{\mathbf{x}}$$