Übungen zur Theoretischen Physik III, Elektrodynamik - Blatt 2

Heiko Dumlich und Max Hoffmann

May 1, 2006

4 Gaußsches Gesetz

Für eine Ladungsverteilung gilt :

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 e^{-\alpha r}$$

Wir benutzen den Gaußschen Integralsatz :

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \overrightarrow{E} = \oint_S da \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{E}$$

wobei wir als geschlossene Fläche die Oberfläche einer Kugel $O_{Kugel} = 4\pi r^2$ benutzen. Zudem gilt $\overrightarrow{E} = -\nabla\phi$, wobei ϕ das elektrostatische Skalarpotential beschreibt. Es gilt zusätzlich noch nach den Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} = -\nabla^2\phi$. Es folgt also mit den Angaben :

$$\int_V d^3x \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} = \oint_S da \overrightarrow{n} \cdot \nabla\phi$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho(\mathbf{x}) = 4\pi r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_V d^3x \rho(\mathbf{x}) = \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$\Leftrightarrow \phi(\mathbf{x}) = \int dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_V d^3x \rho(\mathbf{x})$$

Wir berechnen das Integral $\int_V d^3x\rho(\mathbf{x})$:

$$\int_V d^3x \rho(\mathbf{x}) = \rho_0 \int_V d^3x e^{-\alpha r}$$

Transformation von kartesischen $(dxdydz)$ in Polarkoordinaten $\left(r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi\right)$ liefert:

$$\int_V d^3x\rho(\mathbf{x}) = 4\pi\rho_0 \int_0^\infty drr^2 e^{-\alpha r}$$

$$\Leftrightarrow 4\pi\rho_0 \left(\left[\frac{-r^2}{\alpha} e^{-\alpha r} \right]_0^\infty + \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty drre^{-\alpha r} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4\pi\rho_0 \frac{2}{\alpha} ([\frac{-r}{\alpha} e^{-\alpha r}]_0^\infty + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty dre^{-\alpha r})$$

Wir erhalten also nach den zwei partiellen Integrationen, wobei zwei Terme wegfallen ($\left[\frac{-r^2}{\alpha} e^{-\alpha r}\right]_0^\infty = 0$ und $\left[\frac{-r}{\alpha} e^{-\alpha r}\right]_0^\infty = 0$) :

$$\int_V d^3x\rho(\mathbf{x}) = 4\pi\rho_0 \frac{2}{\alpha^2} \left[\frac{-1}{\alpha} \right] = -4\pi\rho_0 \frac{2}{\alpha^3}$$

Dies setzen wir nun oben ein und erhalten :

$$\phi(\mathbf{x}) = \int dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(-4\pi\rho_0 \frac{2}{\alpha^3} \right) = \frac{-2\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^3} \int dr \frac{1}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \phi\left(\mathbf{x}\right) = \frac{-2\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^3} \left[-\frac{1}{r} \right]$$

Somit folgt für das Skalarpotential der Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0 e^{-\alpha r}$:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{2\rho_0}{\epsilon_0 \alpha^3} \frac{1}{r}$$

5 Abgeschirmtes Coulomb-Potential

Wir spalten das Potential auf, indem wir den allgemeinen Fall $\phi\left(\mathbf{x}_{rest}\right)$ und den Fall für den Ursprung $\phi\left(\mathbf{x}_0\right)$ unterscheiden. Es gilt also :

$$\phi\left(\mathbf{x}_{rest}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} e^{-\alpha r} \left(1 + \alpha r\right)$$

für den allgemeinen Fall ohne den Ursprung $(\mathbf{x} \neq 0)$ zu betrachten. Für den Ursprung gilt $r = 0$ und somit als Näherung :

$$\phi(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{q\alpha}{4\pi\epsilon_0}$$

Wir erhalten die Ladungsverteilung aus dem Potential über die Poissonsche Gleichung :

$$\nabla^2\phi = \Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}) \Rightarrow \rho(\mathbf{x}) = -\epsilon_0\nabla^2\phi$$

Somit folgt für den allgemeinen Fall :

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}_{rest}) = \nabla^2\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}e^{-\alpha r}(1+\alpha r)\right)$$

Unter Verwendung der Beziehung :

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2\frac{d}{dr}f(r)]$$

folgt somit:

$$\rho(\mathbf{x}_{rest}) = -\epsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}e^{-\alpha r}(1+\alpha r)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{-\alpha r}\left[1+\alpha r+\alpha^2 r^2\right]\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left[e^{-\alpha r}\left(\alpha^2 r-\alpha^3 r^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{q\alpha^2}{4\pi}\frac{1}{r^1}e^{-\alpha r}(1-\alpha r)$$

Somit folgt für die Ladungsverteilung des allgemeinen Falles :

$$\rho(\mathbf{x}_{rest}) = \frac{\alpha^2}{4\pi}\frac{q}{r}e^{-\alpha r}(1-\alpha r)$$

Für die Singularität im Ursprung folgt :

$$\rho(\mathbf{x}_0) = -\epsilon_0\nabla^2\phi(\mathbf{x}_0) = -\frac{q}{4\pi}\Delta\frac{1}{r}$$

Der zweite Term fällt wegen der zweifachen Ableitung weg, da er konstant ist. Somit folgt :

$$\rho(\mathbf{x}_0) = -\frac{q}{4\pi}(-4\pi\delta(\mathbf{x}_0)) = q\delta(\mathbf{x}_0)$$

Wir verbinden beide Ladungsverteilungen wieder und erhalten die "wirkliche" Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}_0) + \rho(\mathbf{x}_{rest})$

$$\rho(\mathbf{x}) = q\cdot\delta(\mathbf{x}_0) + \frac{\alpha^2}{4\pi}\frac{q}{r}e^{-\alpha r}(1-\alpha r)$$

6 Kugelsymmetrisches Feld

Wir betrachten die kugelsymmetrische Ladungsverteilung :

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{A}{r}\Theta(R-r)$$

mit $\mathbb{R} \ni A = const.$ und $R > 0$. $\Theta(x)$ stellt die Unit-Step-Function dar. Wir bestimmen das Elektrische Feld der Ladungsverteilung, es gilt :

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \overrightarrow{E} = \oint_S da \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{E}$$

der Gausssche Integralsatz, wobei :

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

Somit folgt :

$$\int_V d^3x \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{E}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{E}(\mathbf{x}) = \frac{A}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_V d^3x \frac{\Theta(R-r)}{r}$$

Transformation in sphärische Polarkoordinaten liefert :

$$\overrightarrow{E}(\mathbf{x}) = \frac{A}{\epsilon_0 r^2} \int dr \Theta(R-r) r$$

Wir können partiell integrieren und erhalten :

$$\overrightarrow{E}(\mathbf{x}) = \frac{A}{\epsilon_0 r^2} \left(\left[\frac{1}{2r^2} \Theta(R-r) \right]_0^\infty - \frac{1}{2} \int dr \delta(R-r) r \right)$$

Der Term $\left[\frac{1}{2}r^2\Theta(R-r)\right]_0^\infty$ ist 0, da für 0 $r^2 = 0$ wird und für "∞" wird $\Theta(R-r) = 0$ (Man kann also anstatt $\int_0^\infty dr\Theta(R-r) = \int_0^R dr$ schreiben). Somit bleibt :

$$\overrightarrow{E}(\mathbf{x}) = \frac{A}{2\epsilon_0 r^2}\left[R^2\right]$$

Damit erhalten wir für das Elektrische Feld, indem wir den Einheitsvektor $\frac{\overrightarrow{r}}{r}$ multiplizieren:

$$\overrightarrow{E}(\mathbf{x}) = \frac{A}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

Wir berechnen nun das Skalarpotential mit der Randbedingung $\phi(r=\infty) = 0$:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$$

Somit folgt (siehe Aufgabe 4) :

$$\phi(\mathbf{x}) = \int dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_V d^3x\rho(\mathbf{x})$$

Wir berechnen das Integral $\int_V d^3x\rho(\mathbf{x})$:

$$\int_V d^3x\rho(\mathbf{x}) = 4\pi A\int dr\, r^2\frac{1}{r}\Theta(R-r)$$

$$\Leftrightarrow 4\pi A\int_0^R dr\, r = 4\pi A\frac{1}{2}R^2$$

$$\int_V d^3x\rho(\mathbf{x}) = 2\pi AR^2$$

Einsetzen liefert :

$$\phi(\mathbf{x}) = \int dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}2\pi AR^2 = \frac{AR^2}{2\epsilon_0}\int dr\,\frac{1}{r^2}$$

Somit folgt für das Skalarpotential :

$$\phi\left(\mathbf{x}\right) = -\frac{A}{6\epsilon_0}\frac{R^2}{r^3}$$

Das Skalarpotential erfüllt die geforderte Bedinung $\phi(r=\infty) = 0$.