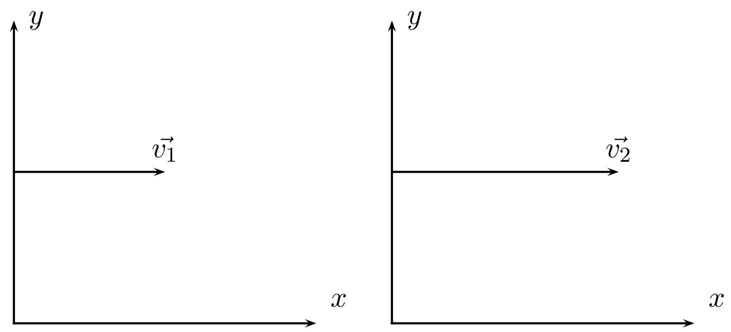
Theoretische Physik III Übungszettel 12

Heiko Dumlich, Max Hoffmann

10. Juli 2006

31 Lorentz-Boost I



Es ist zu zeigen, dass die zweifache Anwendung eines LORENTZ-Boosts in die gleiche Richtung mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 einer einfachen Anwendung in die selbe Richtung mit der Geschwindigkeit $\frac{v_1+v_2}{1+v_1 v_2/c^2}$ entspricht.

Man lege das Koordinatensystem oBdA so, dass die beiden Boosts in x-Richtung zeigen. Dann lauten die beiden Boosts ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 \\ -\beta_2\gamma_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Anwendung beider entspricht dann gerade dem Produkt der beiden Matrizen:

$$\begin{aligned} A \equiv A_1 A_2 &= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2\left(1+\beta_1\beta_2\right) & -\gamma_1\gamma_2\left(\beta_1+\beta_2\right) & 0 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\left(\beta_1+\beta_2\right) & \gamma_1\gamma_2\left(1+\beta_1\beta_2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man betrachte den $(0,0)$-Eintrag:

$$\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Leftrightarrow v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}.$$

Und für $\gamma = \gamma_1\gamma_2\left(1+\beta_1\beta_2\right)$ folgt:

$$\begin{aligned} v &= c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \\ &= c\sqrt{1-\frac{1}{\left(\gamma_1\gamma_2\left(1+\beta_1\beta_2\right)\right)^2}} \\ &= c\sqrt{1-\frac{\left(1-\beta_1^2\right)\left(1-\beta_2^2\right)}{\left(1+\beta_1\beta_2\right)\left(1+\beta_1\beta_2\right)}} \\ &= c\sqrt{\frac{\left(1+\beta_1\beta_2\right)\left(1+\beta_1\beta_2\right)-\left(1-\beta_1^2\right)\left(1-\beta_2^2\right)}{\left(1+\beta_1\beta_2\right)\left(1+\beta_1\beta_2\right)}} \\ &= c\sqrt{\frac{1+2\beta_1\beta_2-1+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_1\beta_2\beta_1\beta_2-\beta_1^2\beta_2^2}{\left(1+\beta_1\beta_2\right)\left(1+\beta_1\beta_2\right)}} \\ &= c\sqrt{\frac{2\beta_1\beta_2+\beta_1^2+\beta_2^2}{\left(1+\beta_1\beta_2\right)\left(1+\beta_1\beta_2\right)}} \\ &= c\sqrt{\frac{\left(\beta_1+\beta_2\right)^2}{\left(1+\beta_1\beta_2\right)^2}} \\ &= \frac{c\left(\beta_1+\beta_2\right)}{1+\beta_1\beta_2} \\ &= \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2} \end{aligned}$$

Da β und γ durch $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ in einer festen Beziehung stehen, gilt der gleiche Zusammenhang auch für den $(1,0)$- und den $(0,1)$-Eintrag.

32 Lorentz-Transformationen

(a)

Es ist zu zeigen, dass die Drehmatrizen $\vec{S}$ und die Boost-Matrizen $\vec{K}$ den Gleichungen:

$$\left(\vec{\epsilon}\cdot\vec{S}\right)^3 = -\vec{\epsilon}\cdot\vec{S}, \qquad \left(\vec{\epsilon}'\cdot\vec{K}\right)^3 = \vec{\epsilon}'\cdot\vec{K},$$

genügen, mit $\vec{\epsilon}$ und $\vec{\epsilon}'$ beliebigen räumlichen Einheitsvektoren.
Es gilt für die Vektoren:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}.$$

Wir können nun die räumlichen Einheitsvektoren abarbeiten, wobei wir von x über y nach z wandern werden, somit folgt:

$$\left(\vec{\epsilon}_x\cdot\vec{S}\right)^3 = (S_1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3.$$

Nun können wir dreimal die Matrix S_1 multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -S_1 = S_1^3,$$

Für Fall für S_2 folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -S_2 = S_2^3,$$

Zum Schluss für die Drehmatrizen $\vec{S}$ betrachten wir S_3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -S_3 = S_3^3,$$

womit die Gültigkeit der Formel für die Drehmatrizen gezeigt ist, da wir die einzelnen Komponenten nun auch wieder zusammenfassen könnten, es gilt also:

$$\left(\vec{\epsilon} \cdot \vec{S}\right)^3 = -\vec{\epsilon} \cdot \vec{S},$$

für beliebigen räumlichen Einheitsvektor $\vec{\epsilon}$.
Betrachten wir nun den Fall für die Lorentz-Boosts, so folgt für K_1 :

$$\left(\vec{\epsilon}_x' \cdot \vec{K}\right)^3 = (K_1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 .$$

Matrizenmultiplikation liefert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K_1 = K_1^3,$$

Wir betrachten den Fall für K_2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K_2 = K_2^3,$$

Und zum Schluß den Fall für K_3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K_3 = K_3^3,$$

womit also auch die Gültigkeit der Formel für die Lorentz-Boosts gezeigt ist, da wir auch hier wieder die einzelnen Komponenten wieder zusammenfassen könnten, es gilt also:

$$\left(\vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right)^3 = \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K},$$

für beliebigen räumlichen Einheitsvektor $\vec{\epsilon}'$.

(b)

Es ist unter Verwendung von **(a)** zu zeigen, dass

$$e^{-\zeta \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}} = 1 - \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K} \sinh \zeta + \left(\vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right)^2 (\cosh \zeta - 1) .$$

Wir nutzen die Reihenentwicklung der e-Funktion $\left(e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)$ und wenden diese auf unser Problem an:

$$e^{-\zeta \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(-\zeta \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\zeta \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\zeta \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\zeta \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right)^4 + \ldots$$

Nun können wir das in Aufgabenteil **(a)** gefundene ausnutzen, wobei $\left(\vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right)^3 = \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}$, wir setzen dies ein und erhalten:

$$e^{-\zeta \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(-\zeta \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\zeta \vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right)\zeta^3 + \frac{1}{4!}\left(-\vec{\epsilon}' \cdot \vec{K}\right)^2 \zeta^4 + \ldots$$

Nun können wir, da nur noch lineare und quadratische Terme in der gesamten Reihe vorkommen umschrieben zu:

$$e^{-\zeta\vec{\epsilon}'\cdot\vec{K}} = 1 - \vec{\epsilon}'\cdot\vec{K}\cdot\left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} + \dots\right) + \left(\vec{\epsilon}'\cdot\vec{K}\right)^2\cdot\left(\frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} + \frac{\zeta^6}{6!} + \dots\right)$$

Wobei für die Reihen Entwicklung für den $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ und für den $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$ gilt. Nun sehen wir sofrt, dass wir diese bei uns einfügen können, wobei wir beim zweiten Term eine 0 hinzufügen, indem wir $1-1$ addieren, wir können also umschreiben zu:

$$e^{-\zeta\vec{\epsilon}'\cdot\vec{K}} = 1 - \vec{\epsilon}'\cdot\vec{K}\sinh\zeta + \left(\vec{\epsilon}'\cdot\vec{K}\right)^2(\cosh\zeta - 1)\,.$$

Was zu zeigen war.

33 Lorentz-Boost II

(a)

Wir betrachten ein Inertialsystem K, mit verschwindendem elektrischen Feld $\left(\vec{E}=0\right)$. Wir führen nun einen Lorentz-Boost mit in x-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch. Es sind die Beziehungen anzugeben, die die im sich geradlinig gegenüber K bewegenden Inertialsystem K' konstant angenommenen elektrischen und magnetischen Felder erfüllen.

Wir führen den Boost durch mit der Transformationsmatrix $\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}$:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Feldstärke $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} == \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Zudem gilt wegen dem Boost in x-Richtung:

$$\begin{aligned} X'^0 &= \gamma\left(X^0 - \beta X^1\right) \\ X'^1 &= \gamma\left(-\beta X^0 - X^1\right) \end{aligned}$$

Somit folgt also, indem wir die einzelnen Elemente der Feldstärke ablaufen, wobei wir die Transformationsmatrix anwenden:

$$
\begin{aligned}
-E'_x = F'^{01} &= \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^1{}_\beta F^{\alpha\beta} \\
&= \Lambda^0{}_\alpha \left(-\beta\gamma F^{\alpha 0} + \gamma F^{\alpha 1}\right) \\
&= -\beta\gamma^2 \underbrace{F^{00}}_{=0} + \beta^2\gamma^2 \underbrace{F^{10}}_{=E_x} + \gamma^2 \underbrace{F^{01}}_{=-E_x} - \beta\gamma^2 \underbrace{F^{11}}_{=0} \\
-E'_x &= -\gamma^2 \left(1-\beta^2\right) E_x \\
E'_x &= E_x .
\end{aligned}
$$

Mit $\vec{E} = 0$ ist die x-Komponente auch 0, d.h. in x-Richtung wirkt in keinem der Bezugssysteme eine $\vec{E}$-Feld, dies folgt aber auch daher, dass wir den Boost in die x-Richtung gelegt haben. Es gilt für $E_x = 0$, somit folgt:

$$E'_x = 0$$

Es folgt für die y-Komponente:

$$
\begin{aligned}
-E'_y = F'^{02} &= \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^2{}_\beta F^{\alpha\beta} \\
&= \Lambda^0{}_\alpha \left(F^{\alpha 2}\right) \\
&= \gamma \underbrace{F^{02}}_{=-E_y} - \beta\gamma \underbrace{F^{12}}_{=-B_z} \\
-E'_y &= -\gamma E_y + \beta\gamma B_z \\
E'_y &= \gamma \left(E_y - \beta B_z\right),
\end{aligned}
$$

mit $E_y = 0$ folgt also:

$$E'_y = -\gamma\beta B_z .$$

Betrachten wir nun die z-Komponente:

$$
\begin{aligned}
-E'_z = F'^{03} &= \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^3{}_\beta F^{\alpha\beta} \\
&= \Lambda^0{}_\alpha \left(F^{\alpha 3}\right) \\
&= \gamma \underbrace{F^{03}}_{=-E_z} - \beta\gamma \underbrace{F^{13}}_{=B_y} \\
-E'_z &= -\gamma E_z - \beta\gamma B_y \\
E'_z &= \gamma \left(E_z + \beta B_y\right),
\end{aligned}
$$

mit $E_z = 0$ folgt somit:

$$E'_z = \gamma\beta B_y .$$

Insgesamt folgt also für das elektrische Feld im bewegten Bezugssystem:

$$\vec{E}' = \beta\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -\ B_z \\ B_y \end{pmatrix},$$

das elektrische Feld im bewegten Bezugssystem resultiert also aus dem magnetischen Feld des "ruhenden" Bezugssystems. Hierbei ist $\vec{B} = const.$

Betrachten wir nun das magnetische Feld $\vec{B}'$ im bewegten Bezugssystem. Hierbei folgt für die Komponenten, wobei $\vec{E} = 0$:

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma B_y \\ B'_z &= \gamma B_z \end{aligned}$$

Also für das magnetische Feld:

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} B_x \\ \gamma B_y \\ \gamma B_z \end{pmatrix}.$$

(b)

Es ist zu zeigen, dass wenn in einem Inertialsystem die elektrischen und magnetischen Felder senkrecht zu einander stehen, es ein anderes Inertialsystem gibt, bei dem das elektrische Feld verschwindet. Es ist zudem die Relativgeschwindigkeit zu bestimmen, mit der sich die beiden Inertialsysteme bewegen.

Es gilt $\vec{E} \perp \vec{B}$ und hieraus soll folgen, dass $\vec{E}' = 0$.

Für die Beziehungen zwischen den Systemen gilt:

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel, \qquad \vec{E}'_\perp = \gamma \left(\vec{E}_\perp + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$
$$\vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel, \qquad \vec{B}'_\perp = \gamma \left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \right)$$

Und die Bedingungen an die Felder sind:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp \\ \vec{B} &= \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp \\ \vec{E} &\perp \vec{B} \end{aligned}$$

Betrachten wir zuerst den Speziallfall $\vec{v} = 0$, für diesen darf das $\vec{E}'$-Feld nicht verschwinden, es folgt:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \qquad \vec{E}'_{\perp} = \gamma \vec{E}_{\perp}$$
$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma \vec{B}_{\perp}$$

wobei $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1$, da $v = 0$. Dies ist gerade der Fall, wenn wir das gleiche Bezugssystem betrachten. Nun betrachten wir den Fall, dass $\vec{v} \neq 0$. Für diesen folgt:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \qquad \vec{E}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} \right) \right) = \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\parallel} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\perp} \right)$$
$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \right) \right) = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}_{\parallel} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}_{\perp} \right)$$

Wir nutzen die Bedinung, dass $\vec{E}' = 0$, werden soll, somit also:

$$\vec{E}_{\parallel} = 0, \qquad \vec{E}_{\perp} = -\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\parallel} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\perp}$$

Dies können wir in $\vec{B}_{\perp}$ einsetzen:

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c} \times \left(-\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\parallel} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\perp} \right) \right) = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\parallel} \right) + \frac{\vec{v}}{c} \times \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_{\perp} \right) \right)$$

Wir nutzen die Graßmannidentität $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \vec{b} \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) - \vec{c} \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right)$, dies führt somit in unserem Fall auf:

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \vec{B}_{\parallel} \right) - \vec{B}_{\parallel} \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{v}}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \vec{B}_{\perp} \right) - \vec{B}_{\perp} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Nun können wir ausnutzen, dass $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$, dieses eingesetzt liefert:

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \vec{B}'_{\parallel} \right) - \vec{B}'_{\parallel} \frac{v^2}{c^2} + \frac{\vec{v}}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \vec{B}_{\perp} \right) - \vec{B}_{\perp} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Wir stellen um:

$$\vec{B}'_{\perp} + \gamma \vec{B}'_{\parallel} \frac{v^2}{c^2} - \gamma \frac{\vec{v}}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \vec{B}'_{\parallel} \right) = \gamma \left(\vec{B}_{\perp} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{\vec{v}}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \vec{B}_{\perp} \right) \right)$$

Hieraus müssten wir $\vec{B}_{\perp}$ bestimmen, danach könnten wir dies in $\vec{E}'_{\perp}$ einsetzen und erhielten dann hieraus $\vec{E}'_{\perp}$ in Abhängigkeit von $\vec{B}'$ und könnten ein $\vec{v}$ bestimmen, um das $\vec{E}'_{\perp}$ verschwinden zu lassen.

34 Kovarianz

(a) Die Feldstärke $F^{\mu\nu}$ ist definiert durch

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

wobei $A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) = (\phi, A_x, A_y, A_z)$. Die 4×4-Matrix $F^{\mu\nu}$ ist asymmetrisch, hat also nur 6 unabhängige Einträge. Die ko- und kontravarianten Vektoren sind definiert durch:

$$x_\mu = (ct, -\vec{x}) \text{ und } x^\mu = (ct, \vec{x}) .$$

Ich beginne mit dem Eintrag F^{01}

$$\begin{aligned} F^{01} &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 \\ &= \underbrace{\partial^t A^x}_{=0} - \partial^x \phi \\ &= \underbrace{\partial_x \phi}_{=\nabla_x \phi} \\ &= -E_x. \end{aligned}$$

In analoger Weise folgt $F^{02} = E_y$ und $F^{03} = E_z$. Als nächstes der $(2,1)$-Eintrag:

$$\begin{aligned} F^{21} &= \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 \\ &= \partial^y A^x - \partial^x A^y \\ &= -\partial_y (-A_x) + \partial_x (-A_y) \\ &= \nabla_z \times A \\ &= B_z. \end{aligned}$$

Und wieder in völlig analoger Weise folgen die übrigen Einträge, so dass:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Angenommen die Gleichung lautet $\partial_\mu F^{\mu\nu} = (4\pi/c)\, J^\nu$ mit $J^\nu = (c\rho, \mathbf{J}) = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$, dann folgen die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} \nu = 0:\ \partial_t \underbrace{F^{00}}_{=0} - \partial_x F^{10} - \partial_y F^{20} - \partial_y F^{30} &= \frac{4\pi}{c} \cdot c\rho \\ \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

Befindet man sich im Vakuum ist das gleichbedeutend mit $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$.

$$
\begin{aligned}
\nu = 1: \; \partial_0 F^{01} - \partial_1 \underbrace{F^{11}}_{=0} - \partial_2 F^{21} - \partial_3 F^{31} &= \frac{4\pi}{c} \cdot J_1 \\
-\frac{1}{c} \cdot \partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y &= \frac{4\pi}{c} \cdot J_x \\
\nabla_x \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \cdot J_x + \frac{1}{c} \cdot \partial_t E_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu = 2: \; \partial_0 F^{02} - \partial_1 F^{12} - \partial_2 \underbrace{F^{22}}_{=0} - \partial_3 F^{32} &= \frac{4\pi}{c} \cdot J_2 \\
-\frac{1}{c} \cdot \partial_t E_y + \partial_z B_x - \partial_x B_z &= \frac{4\pi}{c} J_y \\
\nabla_y \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \cdot J_y + \frac{1}{c} \cdot \partial_t E_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu = 3: \; \partial_0 F^{03} - \partial_1 F^{13} - \partial_2 F^{23} - \partial_3 \underbrace{F^{33}}_{=0} &= \frac{4\pi}{c} \cdot J_3 \\
-\frac{1}{c} \cdot \partial_t E_z + \partial_x B_y - \partial_y B_x &= \frac{4\pi}{c} J_z \\
\nabla_z \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \cdot J_z + \frac{1}{c} \cdot \partial_t E_z
\end{aligned}
$$

So dass man insgesamt wiederum im Vakuum:

$$
\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{c\,\partial t} \cdot \mathbf{D}
$$

erhält.