Theoretische Physik III Übungszettel 11

Heiko Dumlich, Max Hoffmann

2. Juli 2006

28 Entwicklung des Vektorpotentials nach ebenen Wellen

Der Drehimpuls einer Verteilung elektromagnetischer Felder im Vakuum ist

$$\vec{L} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \, \vec{x} \times \left(\vec{E} \times \vec{B}\right). \tag{1}$$

(a) Es ist, unter Vernachlässigung von Randtermen, zu zeigen, dass sich der Drehimpuls in der Form

$$\vec{L} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \left[\vec{E} \times \vec{A} + E_i \left(\vec{x} \times \nabla\right) A_i\right] \tag{2}$$

schreiben lässt. Den ersten Term nennen wir $\vec{L}_{spin}$.
Wir betrachten als (1) und nutzen die Beziehung $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$:

$$\vec{L} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \, \vec{x} \times \left(\vec{E} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)\right) \Rightarrow L_o = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \, \left[\vec{x} \times \left(\vec{E} \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)\right)\right]_o$$

Dies schreiben wir nun in Komponentenschreibweise, wobei wir die o-te Komponente betrachten:

$$\begin{aligned}
L_o &= \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \, \epsilon_{nom} x_n \epsilon_{lmk} E_l \epsilon_{ijk} \partial_i A_j \\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \, \epsilon_{nom} \epsilon_{lmk} \epsilon_{ijk} x_n E_l \partial_i A_j \\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \, \epsilon_{nom} \epsilon_{lmk} \epsilon_{ijk} \left(\partial_i \left(x_n E_l A_j\right) - E_l A_j \partial_i x_n - x_n A_j \partial_i E_l\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \, \left[-\left(\delta_{nk}\delta_{ol} - \delta_{nl}\delta_{ok}\right) \epsilon_{ijk} E_l A_j \partial_i x_n - \epsilon_{nom} \epsilon_{lmk} \epsilon_{ijk} x_n A_j \partial_i E_l\right] \\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \, \left[\left(\delta_{nl}\delta_{ok} - \delta_{nk}\delta_{ol}\right) \epsilon_{ijk} E_l A_j \partial_i x_n - \epsilon_{nom} \epsilon_{klm} \epsilon_{ijk} \left(x_n \partial_i \left(A_j E_l\right) - x_n E_l \partial_i A_j\right)\right] \\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \, \left[\epsilon_{ijo} E_n A_j \delta_{in} - \epsilon_{nom} \left(\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi}\right) \left(x_n \partial_i \left(A_j E_l\right) - x_n E_l \partial_i A_j\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu_0 c^2}\int d^3x\, \left[\epsilon_{ijo}E_iA_j + \epsilon_{noj}x_nE_i\partial_iA_j - \epsilon_{noi}x_nE_j\partial_iA_j - \epsilon_{noj}x_n\partial_i\left(A_jE_i\right) + \epsilon_{noi}x_n\partial_i\left(A_jE_j\right)\right]\\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2}\int d^3x\, \left[\left[\vec{E}\times\vec{A}\right]_o + \epsilon_{nio}x_nE_j\partial_iA_j + \epsilon_{noj}x_nE_i\partial_iA_j - \epsilon_{noj}x_n\partial_i\left(A_jE_i\right) - \epsilon_{noi}x_n\partial_i\left(A_jE_j\right)\right]\\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2}\int d^3x\, [\left[\vec{E}\times\vec{A}\right]_o + \left[E_j\left(\vec{x}\times\nabla\right)A_j\right]_o - \epsilon_{njo}x_nE_i\partial_iA_j + \epsilon_{njo}x_nE_i\partial_iA_j + \epsilon_{njo}x_nA_j\partial_iE_i\\
&+ \epsilon_{nio}x_n\partial_i\left(A_jE_j\right)]\\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2}\int d^3x\, \left[\left[\vec{E}\times\vec{A}\right]_o + \left[E_j\left(\vec{x}\times\nabla\right)A_j\right]_o + \epsilon_{ino}A_jE_j\partial_ix_n - \epsilon_{ino}\partial_i\left(x_nA_jE_j\right)\right]\\
&= \frac{1}{\mu_0 c^2}\int d^3x\, \left[\left[\vec{E}\times\vec{A}\right]_o + \left[E_j\left(\vec{x}\times\nabla\right)A_j\right]_o\right]
\end{aligned}
$$

Somit folgt also (2) :

$$\vec{L} = \frac{1}{\mu_0 c^2}\int d^3x\left[\vec{E}\times\vec{A} + E_i\left(\vec{x}\times\nabla\right)A_i\right]$$

Was zu zeigen war.

(b) Wir betrachten die Entwicklung des Vektorpotentials nach ebenen Wellen in der Strahlungseichung $\left(\nabla\cdot\vec{A}=0\right)$:

$$\vec{A}\left(\vec{x},t\right) = \sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t} + c.c.\right] \tag{3}$$

mit $\lambda = +,-$ und Polarisationsvektoren $\vec{\epsilon}_\pm\left(\vec{k}\right) = \left[\vec{e}_1\left(\vec{k}\right)\pm i\vec{e}_2\left(\vec{k}\right)\right]/\sqrt{2}$. Zu zeigen ist, dass im zeitlichen Mittel

$$\vec{L}_{spin} = \frac{2}{\mu_0 c}\sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\lambda\vec{k}\left|a_\lambda\left(\vec{k}\right)\right|^2$$

gilt. Für die Strahlungseichung gilt zudem $\vec{E}_\perp = -\frac{\partial\vec{A}_\perp}{\partial t}$, in dem Falle, dass keine Quellen vorhanden sind gilt mit $\vec{E}_\| = -\nabla\phi = 0$ und $\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\|$ auch $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, dies können wir nun für den "Spin-Term" (den erste Term von $\vec{L}$) einsetzen:

$$\vec{L}_{spin} = \frac{1}{\mu_0 c^2}\int d^3x\,\vec{E}\times\vec{A} \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu_0 c^2}\int d^3x\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\times\vec{A} \tag{5}$$

Wir bestimmen den Term $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial\vec{A}\left(\vec{x},t\right)}{\partial t} = \sum_\alpha\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\vec{\epsilon}_\alpha\left(\vec{k}\right)a_\alpha\left(\vec{k}\right)\left(-i\omega\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t} + c.c.\right] \tag{6}$$

Wir bestimmen zuerst den $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\times\vec{A}$ Term, wobei wir (3) und (6) einsetzen:

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\times\vec{A}=\sum_{\alpha}\sum_{\lambda}\int\int\frac{d^3k'd^3k}{(2\pi)^6}\left\{\left[\vec{\epsilon}_\alpha\left(\vec{k}'\right)a_\alpha\left(\vec{k}'\right)(-i\omega)\,e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}-i\omega t}+c.c.\right]\times\left[\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\omega t}+c.c.\right]\right\}$$

Umordnen liefert:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha}\sum_{\lambda}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\left[\vec{\epsilon}_\alpha\left(\vec{k}'\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)a_\alpha\left(\vec{k}'\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\,e^{i\left(\vec{k}'+\vec{k}\right)\cdot\vec{x}-2i\omega t}\right]+\\
&+ \left[\left(\vec{\epsilon}^{\,*}_\alpha\left(\vec{k}'\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)\right)a^*_\alpha\left(\vec{k}'\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\,e^{i\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\cdot\vec{x}-i\omega t+i\omega t}\right]+c.c.\}
\end{aligned}$$

Einsetzen von dem Ergebnis aus $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\times\vec{A}$ in (5) liefert:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{spin} &= \frac{-1}{\mu_0c^2}\sum_{\alpha}\sum_{\lambda}\int d^3x\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\left[\vec{\epsilon}_\alpha\left(\vec{k}'\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)a_\alpha\left(\vec{k}'\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\,e^{i\left(\vec{k}'+\vec{k}\right)\cdot\vec{x}-2i\omega t}\right]+\\
&+ \left[\left(\vec{\epsilon}^{\,*}_\alpha\left(\vec{k}'\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)\right)a^*_\alpha\left(\vec{k}'\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\,e^{i\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\cdot\vec{x}}\right]+c.c.\}
\end{aligned}$$

Wir können nun die von der x Integration unabhängigen Terme vor das Integral ziehen, dies liefert:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{spin} &= \frac{-1}{\mu_0c^2}\sum_{\alpha}\sum_{\lambda}\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\left[\vec{\epsilon}_\alpha\left(\vec{k}'\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)a_\alpha\left(\vec{k}'\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\,e^{-2i\omega t}\int d^3x\,e^{i\left(\vec{k}'+\vec{k}\right)\cdot\vec{x}}\right]+\\
&+ \left[\left(\vec{\epsilon}^{\,*}_\alpha\left(\vec{k}'\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)\right)a^*_\alpha\left(\vec{k}'\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\int d^3x\,e^{i\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\cdot\vec{x}}\right]+c.c.\}
\end{aligned}$$

Mit der Definition der δ-Funktion $\int\frac{dx}{2\pi}\,e^{ikx}=\delta(k)$ folgt für drei Dimensionen $\int d^3x\,e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}\right)}=(2\pi)^3\,\delta\left(\vec{k}\right)$, dies liefert also auf unser Problem angewandt:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{spin} &= -\frac{1}{\mu_0c^2}\sum_{\alpha}\sum_{\lambda}\int d^3k'\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\left[\left(\vec{\epsilon}_\alpha\left(\vec{k}'\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)\right)a_\alpha\left(\vec{k}'\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\,e^{-2i\omega t}\delta\left(\vec{k}+\vec{k}'\right)\right]+\\
&+ \left[\left(\vec{\epsilon}^{\,*}_\alpha\left(\vec{k}'\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)\right)a^*_\alpha\left(\vec{k}'\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\,\delta\left(\vec{k}-\vec{k}'\right)\right]+c.c.\}
\end{aligned}$$

Ausführen der δ-Funktionen durch Integration über k' liefert:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{spin} &= -\frac{1}{\mu_0c^2}\sum_{\alpha}\sum_{\lambda}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\left[\left(\vec{\epsilon}_\alpha\left(-\vec{k}\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)\right)a_\alpha\left(-\vec{k}\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\,e^{-2i\omega t}\right]+\\
&+ \left[\left(\vec{\epsilon}^{\,*}_\alpha\left(\vec{k}\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)\right)a^*_\alpha\left(\vec{k}\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)\right]+c.c.\}
\end{aligned}$$

Betrachtung des zeitliche Mittels von diesem Term ($\langle\vec{L}_{spin}\rangle_t = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \vec{L}_{spin}\,dt$), wobei wir durch die Integration die $e^{\pm 2i\omega t}$ Terme (der $e^{+2i\omega t}$ Term befindet sich in *c.c.*) gleich vernachlässigen können, da sie im zeitlichen Mittel 0 ergeben, liefert:

$$\langle\vec{L}_{spin}\rangle_t = -\frac{1}{\mu_0 c^2}\sum_\alpha\sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\{\left[\left(\vec{\epsilon}^*_\alpha\left(\vec{k}\right)\times\vec{\epsilon}_\lambda\left(\vec{k}\right)\right)a^*_\alpha\left(\vec{k}\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)+c.c.\right]$$

Nun können wir noch die Eigenschaften der ϵ-Vektoren ausnutzen, wobei:

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}_+\times\vec{\epsilon}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_1+i\vec{e}_2\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_1-i\vec{e}_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_1-i\vec{e}_1\times\vec{e}_2+i\vec{e}_2\times\vec{e}_1+\vec{e}_2\times\vec{e}_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-2i\vec{e}_1\times\vec{e}_2\right)\\
&= -i\frac{\vec{k}}{k}
\end{aligned}$$

da $\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \frac{\vec{k}}{k}$ gilt, da $\vec{k}$ senkrecht auf $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ stehe. Somit folgt für die anderen Kombinationen:

$$\begin{aligned}
\vec{\epsilon}_-\times\vec{\epsilon}_+ &= i\frac{\vec{k}}{k}\\
\vec{\epsilon}_+\times\vec{\epsilon}_+ &= 0\\
\vec{\epsilon}_-\times\vec{\epsilon}_- &= 0
\end{aligned}$$

gilt. Für die konjugiert komplexen $\epsilon*$ folgt nun jeweils, dass $\vec{\epsilon}^*_+ = \vec{\epsilon}_-$ und umgekehrt gilt. Somit folgt also mit Einsetzen:

$$\langle\vec{L}_{spin}\rangle_t = -\frac{1}{\mu_0 c^2}\sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\lambda\left(-i\frac{\vec{k}}{k}\right)a^*_\lambda\left(\vec{k}\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)(-i\omega)+c.c.\right]$$

mit $\omega = 2\pi\nu$ und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $c = \lambda\nu$ folgt:

$$\langle\vec{L}_{spin}\rangle_t = \frac{1}{\mu_0 c}\sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\lambda\vec{k}a^*_\lambda\left(\vec{k}\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right)+c.c.\right]$$

Somit folgt also, mit $a^*_\lambda\left(\vec{k}\right)a_\lambda\left(\vec{k}\right) = \left|a_\lambda\left(\vec{k}\right)\right|^2$ und dem Faktor 2 mit dem *c.c.*, das zu zeigende $\vec{L}_{spin}$ im zeitlichen Mittel:

$$\vec{L}_{spin} = \frac{2}{\mu_0 c}\sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\lambda\vec{k}\left|a_\lambda\left(\vec{k}\right)\right|^2.$$

29 Elektromagnetische Wellen

Es ist die Wellengleichung für das magnetische und elektrische Feld $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ bzw. $\vec{E}=\frac{1}{\epsilon}\vec{D}$ in einem unendlich ausgedehnten leitenden Medium mit konstanter Permeabilität μ, Dielektrizität ϵ und Leitfähigkeit σ herzuleiten. Im ganzen Medium sei $\rho(\vec{x}) = 0$ und es gelte das Ohmsche Gesetz $\vec{J} = \sigma\vec{E}$.

Wir betrachten die Maxwellschen Gleichungen in Materie:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{7}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{8}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{10}$$

Für (8) folgt mit dem ohmschen Gesetz $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ und $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\left(\sigma\vec{E} + \epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Betrachten wir zusätzlich die Rotation von (9) :

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$$

Wir können nun von oben einsetzen und die Graßmannidentität anwenden:

$$\nabla\left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \left(\nabla \cdot \nabla\right)\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Nun fällt der erste Term wegen $\rho(\vec{x}) = 0$, d.h. (7)$\nabla \cdot \vec{D} = 0$ und wegen der linearen Abhängigkeit zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ mit $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ folgt also auch $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, weg und wir erhalten:

$$\left(\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Für die Wellengleichung des elektrischen Feldes. Für das magnetische Feld folgt, wenn wir die Rotation auf das Ergebnis von (8) anwenden:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \mu\left(\sigma\left(\nabla \times \vec{E}\right) + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{E}\right)\right)$$

wir können (9) einsetzen und erhalten:

$$\nabla\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = \mu\left(-\sigma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\right)$$

Somit folgt für die Wellengleichung des magnetischen Feldes, da nach (10) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ gilt:

$$\left(\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = -\mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

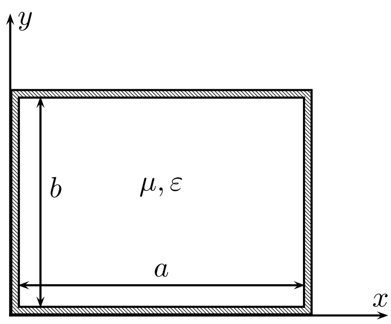
Somit gilt also für die Wellengleichungen:

$$\left(\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = -\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\left(\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = -\mu\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

30 Wellenleiter

Betrachte folgende Anordnung:



(a) Mit dem Ansatz

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}(x,y)\, e^{i(kz-\omega t)};\;\; \vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}(x,y)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

kann man beide Felder in Ausbreitungs- und Tranversalanteil zerlegen:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \left(E_z(x,y)\,\vec{e}_z + \vec{E}_\perp(x,y)\right) e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \left(B_z(x,y)\,\vec{e}_z + \vec{B}_\perp(x,y)\right) e^{i(kz-\omega t)}.$$

Bei transversalmagnetischen Wellen (TM-Wellen) gilt $B_z = 0$. Die Wellengleichung für E_z lautet:

$$\left(\vec{\nabla}_t^2 + \gamma^2\right) E_z = 0$$

wobei $\gamma^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - k^2$ und $\vec{\nabla}_t^2 = \partial_x + \partial_y$ mit der Randbedingung:

$$E_z|_S = 0.$$

(b) Mit dem Ansatz $E_z(x,y) = E_0 e^{i(k_x x+\phi_x)} e^{i(k_y y+\phi_y)}$ eingesetzt in die Wellengleichung folgt:

$$-E_0 \left(e^{i(k_x x+\phi_x)} e^{i(k_y y+\phi_y)} \left(k_x^2 + k_y^2\right) + \gamma\right) = 0.$$

bzw. weil nur der Realteil in das Feld einfließt

$$\cos(k_x x + \phi_x)\cos(k_y y + \phi_y)\left(k_x^2 + k_y^2\right) + \gamma^2 = 0$$

Um die Randbedingungen zu erfüllen muss $\phi_x = \phi_y = -\frac{\pi}{2}$ und $k_x = \frac{m\pi}{a}$ und $k_y = \frac{n\pi}{b}$ gelten. Was eingesetzt

$$\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\left(k_x^2 + k_y^2\right) + \gamma^2 = 0$$

ergibt. Das ergibt für das elektrische Feld in z-Richtung:

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos(kz - \omega t),$$

hierbei wird deutlich, dass $m, n > 0$ gelten muss.

(c) Der erste Summand ist stets positiv, genau wie k. Daher gilt die Abschneidefrequenz

$$\omega_{mn} > \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

(d) Für die Tangentialkomponenten gilt

$$\begin{aligned}
\vec{E}_t &= \frac{i}{\mu\varepsilon\omega^2 - k^2}\left[k\vec{\nabla}_t E_z - \omega\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t B_z\right] \\
\vec{B}_t &= \frac{i}{\mu\varepsilon\omega^2 - k^2}\left[k\vec{\nabla}_t B_z - \mu\varepsilon\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_t E_z\right]
\end{aligned}$$

wobei immer noch $B_z = 0$. Man bilde $\partial_x E_z$ und $\partial_y E_z$.

$$\begin{aligned}
\partial_x E_z &= -E_0 k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y)\, e^{i(kz-\omega t)} \\
\partial_y E_z &= -E_0 k_y \sin(k_y y)\cos(k_y y)\, e^{i(kz-\omega t)}
\end{aligned}$$

und setze ein

$$\begin{aligned}
\vec{E}_t &= \frac{E_0 k \sin(kz - \omega t)}{\mu\varepsilon\omega^2 - k^2}\left[k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y)\,\vec{e}_x + k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y)\,\vec{e}_y\right] \\
\vec{B}_t &= \frac{E_0 \mu\varepsilon \sin(kz - \omega t)}{\mu\varepsilon\omega^2 - k^2}\left[k_x \cos(k_x x)\sin(k_y y)\,\vec{e}_x - k_y \sin(k_x x)\cos(k_y y)\,\vec{e}_y\right]
\end{aligned}$$