Theoretische Physik III Übungszettel 10

Heiko Dumlich, Max Hoffmann

25. Juni 2006

25 Greensche Funktion

Zu zeigen ist, augehend von der retadierten Lösung der *dreidimensionalen* Wellengleichung,

$$\psi(\vec{x},t) = \int d^3x \, \frac{[f(\vec{x}',t')]_{ret}}{|\vec{x}-\vec{x}'|},$$

dass die Quelle $f(\vec{x},t) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t)$, die zweidimensionale Welle

$$\psi(x,y,t) = \frac{2c\Theta(ct-\rho)}{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}$$

erzeugt, wobei $\rho^2 = x^2+y^2$ und $\Theta(ct-\rho)$ die Stufenfunktion darstellt.
Wir können die Quelle in die Lösung der Wellengleichung einsetzen und erhalten:

$$\psi(\vec{x},t) = \int d^3x' \, \frac{\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

wobei $t' = t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c$ gilt. Wir setzen dies ein und können zudem umformen, indem wir das $\frac{1}{c}$ aus der δ-Funktion herausziehen, wobei dies dann ein $|c|$ liefert, da wir jedoch wissen, dass c konstant positiv sind, ist der Betrag redundant und es folgt:

$$\psi(\vec{x},t) = c\int d^3x' \, \frac{\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(ct-|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Nun können wir $|\vec{x}-\vec{x}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ entwickeln und einsetzen, dies liefert:

$$\psi(\vec{x},t) = c\int d^3x' \, \frac{\delta(x')\,\delta(y')\,\delta\left(ct-\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

Nun können wir die trivialen $\delta(x')$ und $\delta(y')$ Integrationen durchführen, dies liefert:

$$\psi(\vec{x},t) = c\int_{-\infty}^{\infty} dz' \, \frac{\delta\left(ct - \sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{(x^2+y^2)+(z-z')^2}}$$

mit $\rho^2 = x^2 + y^2$ folgt:

$$\psi(\vec{x},t) = c\int_{-\infty}^{\infty} dz' \, \frac{\delta\left(ct - \sqrt{\rho^2+(z-z')^2}\right)}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}$$

Für die δ-Funktion gilt:

$$\delta(f(x)) = \delta\left(f'(x_0)(x-x_0)\right) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x-x_0)$$

im Falle von einer Nullstelle der Funktion $f(x)$ mit $f(x_0) = 0$.Im Falle von mehreren Nullstellen gilt:

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i)$$

Somit folgt also:

$$\psi(\vec{x},t) = c\int_{-\infty}^{\infty} dz' \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\left|\frac{(z-z')}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\right|}\delta(z'-z_i)\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}$$

Zudem gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x-x_0)\,f(x) = f(x_0)\,,$$

dies führt auf:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x},t) &= c\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\left|\frac{(z-z_i)}{\sqrt{\rho^2+(z-z_i)^2}}\right|}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z_i)^2}} \\ &= c\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{|z-z_i|}\end{aligned}$$

Wir betrachten die Funktion $f(x) = ct - \sqrt{\rho^2+(z-z')^2}$, um die Nullstellen z_i zu bestimmen:

$$\begin{aligned} ct - \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} &= 0 \\ (z - z')^2 &= c^2t^2 - \rho^2 \end{aligned}$$

Dies kann nicht erfüllt werden wenn $c^2t^2 < \rho^2$,d.h. wir wählen eine Θ-Funktion, die nur die Fälle $c^2t^2 > \rho^2$ betrachtet, d.h. $\Theta(ct - \rho)$, es folgt:

$$\psi(\vec{x}, t) = c\Theta(ct - \rho) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{|z - z_i|}$$

Nun können wir weiter die Nullstellen bestimmen:

$$\begin{aligned} (z - z')^2 &= c^2t^2 - \rho^2 \\ z'^2 - 2zz' + \left(z^2 - c^2t^2 + \rho^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Die *pq-Formel* liefert:

$$z_{1,2} = z \pm \sqrt{c^2t^2 - \rho^2}$$

Nun können wir die zwei Nullstellen einsetzen und erhalten:

$$\psi(\vec{x}, t) = c\Theta(ct - \rho) \left[\frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \right]$$

Dies lässt sich nun noch umformen:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= c\Theta(ct - \rho) \left[\frac{2}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \right] \\ &= \frac{2c\Theta(ct - \rho)}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir also unser Ergebnis mit:

$$\psi(x, y, t) = \frac{2c\Theta(ct - \rho)}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}}$$

was zu zeigen war.

26 Liénard-Wiechertsche Potentiale

Wir betrachten eine Ladung q, die sich auf einer Bahnkurve $\vec{X}(t)$ bewegt. Zu zeigen ist, dass in der Lorenz Eichung $\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\right)$ die folgenden Potentiale eine sich bewegende Punktladung beschreiben:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t') - \vec{R}(t') \cdot \dot{\vec{X}}(t')/c} \tag{1}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{X}}(t')}{R(t') - \vec{R}(t') \cdot \dot{\vec{X}}(t')/c} \tag{2}$$

mit $\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{X}(t)$ und $R(t) = \left|\vec{R}(t)\right|$. Zudem sind der Ort $\vec{X}$ und die Geschwindigkeit $\dot{\vec{X}}$ der Ladung in diesen Ausdrücken zu der *retardierten* Zeit $t' = t - R(t')/c$, zu nehmen.

Für die Ladungsverteilung und Stromdichte gilt bei einer Punktladung:

$$\begin{aligned} \rho\left(\vec{X}, t\right) &= q\delta\left(\vec{x} - \vec{X}(t)\right) \\ \vec{J}\left(\vec{X}, t\right) &= q\dot{\vec{X}}(t)\,\delta\left(\vec{x} - \vec{X}(t)\right) \end{aligned}$$

Hiervon ausgehend, folgt für das Potential mit dem allgemeinen Ansatz:

$$\psi^+(\vec{x}, t) = \int d^3x'\, dt'\, G^+(\vec{x}, t; \vec{x}', t')\, f(\vec{x}', t')$$

wobei dies die Lösung der Gleichung:

$$\nabla^2\psi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t)$$

darstellt. Wir betrachten also den Fall:

$$\nabla^2\phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0}$$

Somit folgt also mit der retardierten Greenschen Funktion $G^+(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)$:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\, dt'\, \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\delta\left(\vec{x}' - \vec{X}(t')\right)\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)$$

Führen wir nun die Volumenintegration aus, so folgt durch die δ-Funktion:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dt'\, \frac{q}{\left|\vec{x} - \vec{X}(t')\right|}\delta\left(t' - t + \frac{\left|\vec{x} - \vec{X}(t')\right|}{c}\right)$$

Nun können wir die Umschreibung $\vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{X}(t')$ verwenden:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \, \frac{q}{\left|\vec{R}(t')\right|} \delta\left(t' - t + \frac{\left|\vec{R}(t')\right|}{c}\right)$$

Wir können nun substituieren, wobei $y = t' - t + \frac{R(t')}{c} \Rightarrow \frac{dy}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\dot{R}(t') = 1 - \frac{\vec{R}(t')}{cR(t')} \cdot \dot{\vec{X}}(t')$, dies liefert:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dy \, \frac{q}{R(t') - \frac{\vec{R}(t')}{c} \cdot \dot{\vec{X}}(t')} \delta(y)$$

Nun kann man noch die Integration von der auf 1 normierten δ-Funktion ausführen, und man erhält:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t') - \vec{R}(t') \cdot \dot{\vec{X}}(t')/c}$$

was zu zeigen war.
Betrachten wir nun den Fall für Gleichung (2), es folgt also:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \, dt' \, \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \dot{\vec{X}}(t') \, \delta\left(\vec{x} - \vec{X}(t')\right) \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)$$

Wir benutzen die gleichen Umformungen wie oben und formen nebenbei $\mu_0 = \frac{\mu_0\epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ um:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dt' \, \frac{1}{\left|\vec{x} - \vec{X}(t')\right|} \dot{\vec{X}}(t') \, \delta\left(t' - t + \frac{\left|\vec{x} - \vec{X}(t')\right|}{c}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dt' \, \frac{\dot{\vec{X}}(t')}{R(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \end{aligned}$$

Dieselbe Substitution liefert:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dy \, \frac{\dot{\vec{X}}(t')}{R(t') - \frac{\vec{R}(t')}{c} \cdot \dot{\vec{X}}(t')} \delta(y)$$

Die Integration über y liefert wiederum 1 und wir erhalten die gesuchte Beziehung:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{X}}(t')}{R(t') - \vec{R}(t') \cdot \dot{\vec{X}}(t')/c}$$

27 Kausalität in der Coulomb-Eichung

Wir betrachten eine Dipolquelle, die zum Zeitpunkt $t = 0$ ein- und ausgeschaltet wird. Diese wird durch folgende Ladungs- und Stromdichten beschrieben:

$$\rho(\vec{x}, t) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta'(z)\,\delta(t)$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = -\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,\dot{\delta}(t)\,\vec{e}_3,$$

mit $\dot{\delta}(t) == \frac{d\delta(t)}{dt}$, $\delta'(z) = \frac{d\delta(z)}{dz}$ und $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$.

(a)

Es ist zu verifizieren, dass die Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Wir betrachten also:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\delta(x)\,\delta(y)\,\frac{\partial \delta(z)}{\partial z}\dot{\delta}(t)$$

und finden für:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\delta(x)\,\delta(y)\,\delta'(z)\,\frac{\partial \delta(t)}{\partial t}$$

Mit der Definition von $\dot{\delta}(t)$ und $\delta'(z)$ folgt also:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ -\delta(x)\,\delta(y)\,\delta'(z)\,\dot{\delta}(t) &= -\delta(x)\,\delta(y)\,\delta'(z)\,\dot{\delta}(t) \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b)

Für die Coulomb-Eichung gilt:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\vec{x}, t) &= -\frac{\rho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J}_\perp \end{aligned}$$

Für das momentante Coulomb-Potential gilt:

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x \frac{\rho(\vec{x},t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Wir können den gegebenen Term für die Ladungsverteilung einsetzen und $|\vec{x}-\vec{x}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ umschreiben:

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' \frac{\delta(x')\,\delta(y')\,\delta'(z')\,\delta(t)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

Mit $\int dz\,\delta'(z)\,f(z) = 0 - \int dz\,\delta(z)\,\frac{d}{dz}f(z)$ durch partielle Integration, erhält man:

$$\phi(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z')\,\delta(t)\,\frac{d}{dz'}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right)$$

Dies liefert nachdem wir die Ableitung ausgeführt haben:

$$\phi(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z')\,\delta(t)\,\frac{(z-z')}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Somit erhält man nach Integration:

$$\phi(\vec{x},t) = -\frac{\delta(t)}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{r^3},$$

wobei $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
mit diesem kann man das longitudinale elektrische Feld mit $\nabla\times\vec{E}_{\|} = 0$ über:

$$\vec{E}_{\|} = -\nabla\phi$$

bestimmen, es folgt also:

$$\vec{E}_{\|} = \frac{\delta(t)}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\frac{z}{r^3}\right)$$

Dies liefert:

$$\vec{E}_{\|} = \frac{\delta(t)}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{3z}{r^5}\vec{x}+\frac{1}{r^3}\vec{e}_z\right)$$

Dieses Feld ist nicht kausal, da wir von der Aufgabenstellung wissen, dass die Dipolquelle nur für den Moment $t=0$ ein Feld aussendet. Jedoch trifft $\vec{E}_{\|}$ die Aussage, dass ein Feld existiert, dass nicht nur dem “Wellenfeld” des Dipolimpulses folgt.

(c)

Nachdem wir in **(b)** $\vec{E}_{\|}$ bestimmt haben, können wir nun die Beziehung:

$$\vec{E}_{\|}(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int d^3x'\,\frac{\nabla'\cdot\vec{E}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

prüfen, wobei $\vec{E} = \vec{E}_{\|} + \vec{E}_{\perp}$ mit $\vec{E}_{\perp} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ und für $\vec{A}$ folgt im Falle der Coulomb-Eichung $\vec{A} = \vec{A}_{\perp}$ also $\vec{E} = -\left(\nabla\phi + \frac{\partial\vec{A}_{\perp}}{\partial t}\right)$. Der leichteste Weg dies zu prüfen, ist, indem wir die Divergenz beider Seiten berechnen:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{E}_{\|}(\vec{x},t) &= \nabla\cdot\left(-\frac{1}{4\pi}\nabla\int d^3x'\,\frac{\nabla'\cdot\vec{E}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\\
&= -\frac{1}{4\pi}\Delta\int d^3x'\,\frac{\nabla'\cdot\vec{E}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\nabla'\cdot\vec{E}(\vec{x}',t)\left(-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')\right)\\
&= \int d^3x'\,\nabla'\cdot\vec{E}(\vec{x}',t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\\
&= \nabla\cdot\vec{E}(\vec{x},t)\\
&= \nabla\cdot\vec{E}_{\|}(\vec{x},t) + \nabla\cdot\vec{E}_{\perp}(\vec{x},t)\\
&= \nabla\cdot\vec{E}_{\|}(\vec{x},t)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass wegen der Coulombeichung $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ gilt und dies angewendet auf:

$$\nabla\cdot\vec{E}_{\perp}(\vec{x},t) = \nabla\cdot\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) = 0$$

Somit gilt also die zu beweisende Beziehung.

(d)

Wir bestimmen die transversale Stromdichte $\vec{J}_{\perp}$ mit $\nabla\cdot\vec{J}_{\perp} = 0$, wobei die allgemeine Beziehung:

$$\vec{J}_{\perp} = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\left[\nabla\times\int d^3x'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]$$

gilt. Zudem gilt $\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$ (siehe Jackson Einband/Formelübersicht). Wir bestimmen also zuerst:

$$\vec{a} = \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

um dann die angegebene Formel verwenden zu können, es folgt also mit Einsetzen der Stromdichte:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z')\,\dot{\delta}(t)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\vec{e}_z \\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{\dot{\delta}(t)}{r}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Dies können wir nun in die Formel einsetzen und es folgt:

$$\begin{aligned}
\nabla\times\left(\nabla\times\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\dot{\delta}(t)}{r}\vec{e}_z\right)\right) &= \nabla\left(\nabla\cdot\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\dot{\delta}(t)}{r}\vec{e}_z\right)\right)-\nabla^2\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\dot{\delta}(t)}{r}\vec{e}_z\right) \\
&= -\dot{\delta}(t)\left[\nabla\left(\nabla\cdot\left(\frac{1}{4\pi r}\vec{e}_z\right)\right)-\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi r}\vec{e}_z\right)\right] \\
&= -\dot{\delta}(t)\left[\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\vec{e}_z\right)\right] \\
&= -\dot{\delta}(t)\left[\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}-\frac{1}{4\pi}\left(-4\pi\delta(\vec{x})\,\vec{e}_z\right)\right] \\
&= -\dot{\delta}(t)\left[\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)+\delta(\vec{x})\,\vec{e}_z\right] \\
&= -\dot{\delta}(t)\left[\delta(\vec{x})\,\vec{e}_z-\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{z}{r^3}\right] \\
&= -\dot{\delta}(t)\left[\delta(\vec{x})\,\vec{e}_z-\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{3z}{r^5}\vec{x}+\frac{1}{r^3}\vec{e}_z\right)\right] \\
&= -\dot{\delta}(t)\left[\delta(\vec{x})\,\vec{e}_z+\frac{3z}{4\pi r^5}\vec{x}-\frac{1}{4\pi r^3}\vec{e}_z\right]
\end{aligned}$$

somit folgt also mit $\frac{\vec{x}}{r}=\vec{n}$:

$$\vec{J}_\perp = -\dot{\delta}(t)\left[\delta(\vec{x})\,\vec{e}_z-\frac{1}{4\pi r^3}\vec{e}_z+\frac{3}{4\pi r^3}\vec{n}\,(\vec{n}\cdot\vec{e}_z)\right]$$

was zu zeigen war.