Übungen zur Theoretischen Physik III, Elektrodynamik
Adriaan Schakel, FU Berlin
Sommersemester 2006
Blatt 8, **Abgabetermin: 12.06.06, 14 Uhr**

19. **Biot-Savart** (4 P)

(a) Ausgehend von dem Biot-Savartschen Gesetz

$$\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathrm{d}\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

für die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, die von einem Stromelement $\mathrm{d}\mathbf{l}'$ bei $\mathbf{x}'$ am Punkt $\mathbf{x}$ erzeugt wird, zeigen Sie, dass das Induktionsfeld einer vom Strom I durch¤ossenen Schleife gegeben ist durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla\Omega(\mathbf{x}),$$

wobei $\Omega(\mathbf{x})$ der von der Schleife über dem Punkt $\mathbf{x}$ aufgespannte räumliche Winkel ist.
Hinweis: Benutzen Sie den STOKESschen Integralsatz

$$\epsilon_{ijk} \int_S \mathrm{dS}_i\, \partial_j A_k = \oint_C \mathrm{d}l_i\, A_i$$

mit geeigneter Wahl von $\mathbf{A}$.

(b) Zeigen Sie, dass asymptotisch für $r \equiv |\mathbf{x}| >> |\mathbf{x}'| \equiv r'$ dieser Winkel folgende Gestalt annimt

$$I\Omega(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}{r^3}.$$

Bestimmen Sie das dazugehörende Induktionsfeld.

(c) Geben Sie die explizite Form von $\Omega(\mathbf{x})$ an, für den Fall, dass die Schleife ein Kreis vom Radius a ist und sich der Beobachter (mit den Koordinanten $\mathbf{x}$) im Abstand d auf der Normalen durch den Kreismittelpunkt be£ndet.

20. **Solenoid** (4 P)

Betrachten Sie einen Solenoid, d.h. eine ideale unendlich lange Spule mit n identischen stromführenden Windungen pro Längeneinheit und dem Strom I. Die Symmetrieachse der Spule sei die z-Achse. Die Windungen können als kreisförmig mit Radius $\rho \equiv \sqrt{x^2+y^2} = a$ und $z =$ konst. angenommen werden, so dass

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = In\,\delta(\rho - a)\,\mathbf{e}_\varphi,$$

wobei Zylinderkoordinanten (ρ, φ, z) verwendet wurden und $\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y$. Die Spule erzeugt ein Verktorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ von der Form $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A(\rho)\mathbf{e}_\varphi$. Das magnetische Induktionsfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x})$ und dessen Rotation sind somit durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B(\rho)\mathbf{e}_z = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big[\rho A(\rho)\Big]\mathbf{e}_z, \qquad \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}B(\rho)\mathbf{e}_\varphi$$

gegeben. Bestimmen Sie $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ im ganzen Raum unter Verwendung der Randbedingungen $A(0) = A(\infty) = 0$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass die Ableitung der Stufenfunktion $\Theta(x)$ die Dirachsche Deltafunktion liefert: $\mathrm{d}\Theta(x)/\mathrm{d}x = \delta(x)$.

21. **Grenzbedingungen** (4 P)

Eine kleine Drahtschleife mit magnetischem Moment $\mathbf{m}$ liegt um den Ursprung einer Kugel vom Radius a und Permeabilitätkonstante μ. Bestimmen Sie das Induktionsfeld innerhalb und außerhalb der Kugel.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass das Magnetfeld innerhalb der Kugel eine Superposition eines Dipolfeldes und eines konstanten Feldes ist.