Übungen zur Theoretischen Physik III, Elektrodynamik

Adriaan Schakel, FU Berlin

Sommersemester 2006

Blatt 5, **Abgabetermin: 22.05.06, 14 Uhr**

12. **GREENsche Funktion II** *4 P*

Betrachten Sie ein elektrostatisches Potential mit DIRICHLETscher Randbedingung auf der Oberfläche einer Hohlkugel vom Radius b.

(a) Zeigen Sie, dass unter der Annahme azimutaler Symmetrie die GREENsche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ für dieses Problem folgende Form annimmt:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} r_<^l \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}} \right) P_l(\cos\gamma),$$

wobei γ der Winkel zwischen den Ortsvektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ darstellt und $r_<(r_>)$ den kleineren (größeren) der beiden Radien $r = |\mathbf{x}|$ und $r' = |\mathbf{x}'|$ bedeutet. Beide Ortsvektoren liegen innerhalb der Kugel, $r, r' < b$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Integraldarstellung das elektrische Potential $\phi(\mathbf{x})$, das von einer geladenen dünnen Scheibe mit Radius $a < b$ und Gesammtladung Q im Zentrum der Kugel herrührt. Bestimmen Sie das Potential nur im Gebiet $a < r < b$. Die Ladungsverteilung ist in Kugelkoordinaten (r', θ', φ') durch

$$\rho(\mathbf{x}') = Q \frac{\delta(\cos\theta')}{\pi a^2 r'} \Theta(r' - a)$$

gegeben, mit $\Theta(x)$ der Stufenfunktion. Die leitende Kugeloberfläche ist geerdet.
Hinweis: $P_{2l+1}(0) = 0$ und $P_{2l}(0) = (-1)^l (2l-1)!!/2^l l!$

13. **Randwertproblem** *4 P*

Betrachten Sie eine Kugel vom Radius a. Eine Ladungsverteilung außerhalb der Kugel verursacht ein elektrostatisches Potential (in Kugelkoordinaten)

$$\phi(a, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \cos\theta$$

auf der Kugeloberfläche. Bestimmen Sie das Potential $\phi(r, \theta, \varphi)$ innerhalb der Kugel ($r < a$).

14. **Multipolenentwicklung** *4 P*

Betrachten Sie einen Zylinder vom Radius a und höhe L mit Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{innerhalb des Zylinders} \\ 0 & \text{außerhalb des Zylinders,} \end{cases}$$

mit ρ_0 einer reellen Konstante.

(a) Bestimmen Sie die kartesische Multipolentwicklung vom elektrischen Potential $\phi(\mathbf{x})$ bis zum Quadrupolmoment Q_{ij}:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^5} \right),$$

wobei q die Gesamtladung und $\mathbf{p}$ das elektrische Dipolmoment darstellen.
Hinweis: Wählen Sie den Koordinatenursprung in der Mitte des Zylinders mit dem Boden bei $z = -L/2$ und dem Deckel bei $z = L/2$.

(b) Zeigen Sie, dass der Ausdruck $W = \int \mathrm{d}^3x' \rho(\mathbf{x}')\phi(\mathbf{x}')$ für die elektrostatische potentielle Energie in großer Entfernung vom Zylinder folgende asymptotische Form annimmt

$$W = q\phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} \frac{\partial E_i(0)}{\partial x_j}.$$