

## Übungen zur Theoretischen Physik III, Elektrodynamik

Adriaan Schakel, FU Berlin

Sommersemester 2006

Blatt 11, **Abgabetermin: 03.07.06, 14 Uhr**

### 28. Entwicklung des Vektorpotentials nach ebenen Wellen

5 P

Der Drehimpuls einer Verteilung elektromagnetischer Felder im Vakuum ist

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

(a) Zeigen Sie, unter Vernachlässigung von Randtermen, dass sich der Drehimpuls in der Form

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int d^3x [\mathbf{E} \times \mathbf{A} + E_i (\mathbf{x} \times \nabla) A_i]$$

schreiben läßt. Den ersten Term nennen wir  $\mathbf{L}_{\text{spin}}$ .

(b) Betrachten Sie folgende Entwicklung des Vektorpotentials nach ebenen Wellen in der Strahlungseichung:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\epsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} + \text{c.c.}],$$

mit  $\lambda = +, -$  und Polarisationsvektoren  $\epsilon_{\pm}(\mathbf{k}) = [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \pm i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})]/\sqrt{2}$ . Zeigen Sie, dass im zeitlichen Mittel

$$\mathbf{L}_{\text{spin}} = \frac{2}{\mu_0 c} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \lambda \mathbf{k} |a_{\lambda}(\mathbf{k})|^2.$$

(c) Berechnen Sie die Feldenergie als Funktion von  $a_{\lambda}(\mathbf{k})$ .

### 29. Elektromagnetische Wellen

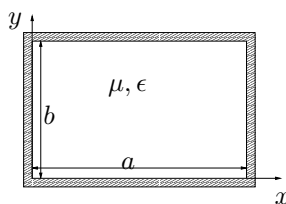
3 P

Leiten Sie die Wellengleichungen für das magnetische und elektrische Feld  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  bzw.  $\mathbf{E} = (1/\epsilon)\mathbf{D}$  in einem unendlich ausgedehnten leitenden Medium mit konstanten Permeabilität  $\mu$ , Dielektrizität  $\epsilon$  und Leitfähigkeit  $\sigma$  her. Im ganzen Medium ist  $\rho(\mathbf{x}) = 0$  und es gilt das Ohmsche Gesetz  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ .

### 30. Wellenleiter

4 P

Betrachten Sie einen unendlich langen Rechteckwellenleiter (dessen Wände aus Metall sind) mit den inneren Abmessungen  $a$  und  $b$ , so dass der Querschnitt des Hohlraums durch  $0 \leq x \leq a$  und  $0 \leq y \leq b$  festgelegt ist (siehe Abb.). Betrachten Sie die Ausbreitung von TM-Wellen in diesem Wellenleiter mit konstanten  $\mu$  und  $\epsilon$ .



- Wie lautet die Wellengleichung für  $E_z$  und welchen Randbedingungen unterliegt sie?
- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen dieser Wellengleichung.
- Bestimmen Sie die Grenzfrequenzen der Wellen.
- Bestimmen Sie die elektrischen und magnetischen Felder im Innenraum.