Übungen zur Theoretischen Physik III, Elektrodynamik

Adriaan Schakel, FU Berlin

Sommersemester 2006

Blatt 10, **Abgabetermin: 26.06.06, 14 Uhr**

25. **Greensche Funktion** *4 P*

Zeigen Sie, ausgehend von der retardierten Lösung der *dreidimensionalen* Wellengleichung,

$$\Psi(\mathbf{x},t) = \int \mathrm{d}^3x' \frac{[f(\mathbf{x}',t')]_{\mathrm{ret}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|},$$

dass die Quelle $f(\mathbf{x},t) = \delta(x)\delta(y)\delta(t)$, die zweidimensionale Welle

$$\Psi(x,y,t) = \frac{2c\,\Theta(ct-\rho)}{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}$$

erzeugt, wobei $\rho^2 = x^2+y^2$ und $\Theta(x)$ die Stufenfunktion ist.

26. **Liénard-Wiechertsche Potentiale** *4 P*

Es sei $\mathbf{X}(t)$ die Bahnkurve einer Punktladung q. Zeigen Sie, dass in der Lorenz-Eichung die folgenden Potentiale eine sich bewegende Punktladung beschreiben

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R(t')-\mathbf{R}(t')\cdot\dot{\mathbf{X}}(t')/c}\ , \\
\mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\ \frac{\dot{\mathbf{X}}(t')}{R(t')-\mathbf{R}(t')\cdot\dot{\mathbf{X}}(t')/c}\ ,
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{x}-\mathbf{X}(t)$ und $R(t) = |\mathbf{R}(t)|$. Der Ort $\mathbf{X}$ und die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{X}}$ der Ladung sind in diesen Ausdrucken zu der *retardierten* Zeit $t' = t - R(t')/c$, zu nehmen.

27. **Kausalität in der Coulomb-Eichung** *4 P*

Betrachten Sie eine Dipolquelle, die zur Zeit $t = 0$ ein- und ausgeschaltet wird. Sie wird durch folgende Ladungs- und Stromdichten beschrieben:

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x},t) &= \delta(x)\delta(y)\delta'(z)\delta(t) \\
\mathbf{J}(\mathbf{x},t) &= -\delta(x)\delta(y)\delta(z)\dot{\delta}(t)\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

mit $\dot{\delta}(t) = \mathrm{d}\delta(t)/\mathrm{d}t$ und $\delta'(z) = \mathrm{d}\delta(z)/\mathrm{d}z$

(a) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung gilt.

(b) Bestimmen Sie unter Verwendung der Coulomb-Eichung $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ das momentane Coulomb-Potential $\phi(\mathbf{x},t)$ und hieraus das longitudinale elektrische Feld $\mathbf{E}_\parallel$ mit $\nabla\times\mathbf{E}_\parallel = 0$. Ist letzteres Feld kausal?

(c) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbf{E}_\parallel(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int \mathrm{d}^3x' \frac{\nabla'\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.$$

(d) Bestimmen Sie die transversale Stromdichte $\mathbf{J}_\perp$ mit $\nabla\cdot\mathbf{J}_\perp = 0$.