Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 9, Abgabetermin: 02.01.06

1. *Variationsproblem* 15 P

   Bestimmen Sie den kürzesten Weg (geodätische Linie) zwischen zwei Punkten A und B auf der Oberfläche einer Kugel.

2. Legendre–*Transformationen in der Thermodynamik* 15 P

   Die *innere Energie* U eines (einfachen, einkomponentigen) Systems ist eine Funktion der (extensiven) thermodynamischen Variablen Entropie S, Volumen V und Molzahl N:

$$U = U(S, V, N) \;, \qquad \text{“Fundamentalrelation”}. \tag{1}$$

   Ist die Funktion $U(S, V, N)$ bekannt, dann lassen sich alle thermodynamischen Aussagen über das System aus der (deshalb so bezeichneten) Fundamentalrelation herleiten.

   Zum Beispiel ist für ein klassisches *einatomiges ideales Gas* bekannt (U_0, V_0, N_0 Parameter eines Referenzzustands, S_0 (nicht bekannte) Integrationskonstante):

$$S = \frac{N}{N_0} S_0 + NR \ln \left[\left(\frac{U}{U_0} \right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0} \right) \left(\frac{N}{N_0} \right)^{-5/2} \right] \;, \tag{2}$$

   woraus $U(S, V, N)$ für ein ideales Gas entnommen werden kann.

   Von großer praktischer Bedeutung sind die partiellen Ableitungen der inneren Energie U, die (intensiven) Parameter T, P und μ,

$$\frac{\partial U}{\partial S} =: \; T = T(S, V, N) \;, \qquad \text{“Temperatur”} \tag{3}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial V} =: \; P = P(S, V.N) \;, \qquad \text{“Druck”} \tag{4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial N} =: \; \mu = \mu(S, V, N) \;, \qquad \text{“elektrochemisches Potential”}. \tag{5}$$

   Als partielle Ableitungen von $U(S, V, N)$ sind T, P und μ ebenfalls Funktionen von S, V und N. Verknüpfungen wie in Gln.(3)–(5), in denen intensive Parameter durch die unabhängigen extensiven Variablen ausgedrückt werden, heißen *Zustandsgleichungen* —speziell *Zustandsgleichungen in der Energiedarstellung*, wenn sie durch partielle Ableitung der inneren Energie U gewonnen wurden.[1]

Häufig ist auch die durch kleine Änderung der extensiven Parameter (um $\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}V$ und $\mathrm{d}N$, respective) bewirkte Energieänderung $\mathrm{d}U$ des Systems,

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N \qquad \text{“totales Differential” von } U\ , \tag{6}$$

von Interesse.

Alternative, zu Gl.(1) äquivalente Fundamentalrelationen lassen sich durch Betrachtung der folgenden LEGENDRE–Transformierten von U gewinnen,

$$\begin{aligned} F &\equiv U - TS = F(T,V,N) && \text{“HELMHOLTZs Freie Energie”} && (7)\\ H &\equiv U + PV = H(S,P,N) && \text{“Enthalpie”} && (8)\\ G &\equiv U - TS + PV = G(T,P,N) && \text{“GIBBS’ Freie Energie”.} && (9) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die (alternativen) Fundamentalrelationen eines *einatomigen idealen Gases*

(a) $F{=}F(T,V,N)$ (HELMHOLTZ–Freie–Energie–Darstellung), und ermitteln Sie durch partielle Ableitung die zugehörigen Zustandsgleichungen $S{=}S(T,V,N)$, $P{=}P(T,V,N)$ und $\mu{=}\mu(T,V,N)$.

(b) $H{=}H(S,P,N)$ (Enthalpie–Darstellung), und ermitteln Sie durch partielle Ableitung die zugehörigen Zustandsgleichungen $T{=}T(S,P,N)$, $V{=}V(S,P,N)$ und $\mu{=}\mu(S,P,N)$.

(c) $G{=}G(T,P,N)$ (GIBBS–Freie–Energie–Darstellung), und ermitteln Sie durch partielle Ableitung die zugehörigen Zustandsgleichungen $S{=}S(T,P,N)$, $V{=}V(T,P,N)$ und $\mu{=}\mu(T,P,N)$.

Geben Sie auch das totale Differential der sog. *thermodynamischen Potentiale* F, H und G in der zu Gl.(6) analogen Form an.

---

[1] Kenntnis einer einzigen Zustandsgleichung würde nicht für eine vollständige Beschreibung der thermodynamischen Eigenschaften ausreichen, Kenntnis *aller* Zustandsgleichungen ist dagegen äquivalent zur Kenntnis der Fundamentalrelation Gl.(1).