Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 8, Abgabetermin: 12.12.05

1. *Differentieller Wirkungsquerschnitt* 15 P

Ein Zentralkraftpotential, das in der Kernphysik häufig auftritt, ist das sog. *Stufenpotential*, definiert durch

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & , \text{wenn} \quad |\mathbf{r}| > a \\ -V_0 & , \text{wenn} \quad |\mathbf{r}| < a \end{cases} , \tag{1}$$

wobei $V_0 > 0$ eine Konstante ist.

(a) Zeigen Sie, dass die durch ein solches Potential in der klassischen Mechanik erzeugte Streuung identisch ist mit der Brechung von Lichtstrahlen durch eine Kugel mit Radius a und dem relativen Brechungsindex [1]

$$n = \sqrt{\frac{E + V_0}{E}} . \tag{2}$$

(b) Zeigen Sie, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\theta) = \frac{n^2 a^2 \left[n \cos(\theta/2) - 1\right] \left[n - \cos(\theta/2)\right]}{4 \cos(\theta/2) \left\{\left[1 + n^2 - 2n \cos(\theta/2)\right]^2\right\}} \tag{3}$$

ist.

(c) Wie lautet der totale Wirkungsquerschnitt?

2. *Geladenes Teilchen im Licht* 20 P

Auf ein Teilchen (Masse m, Ladung $(-e)$), das durch die Rückstellkraft $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$ an die Ruhelage $\mathbf{r}_0 = 0$ gebunden sei, werde Licht der Wellenlänge λ eingestrahlt, das durch Potentiale (c, A_0 positive Konstanten)

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= 0 && (4) \\ \mathbf{A}(x, y, z, t) &= A_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right] \mathbf{e}_y && (5) \end{aligned}$$

[1] Diese Äquivalenz legt dar, weshalb es möglich ist, die Brechungserscheinungen sowohl durch HUYGENSsche Wellen als auch durch NEWTONsche mechanische Korpuskeln zu erklären.

charakterisiert wird. Die Teilchenbewegung werde durch eine Reibungskraft behindert, die durch die RAYLEIGHsche Dissipationsfunktion

$$D = \frac{1}{2}\, m\Gamma\, \dot{\mathbf{r}}^2 \tag{6}$$

beschrieben wird, wobei $\Gamma > 0$ eine Dämpfungskonstante ist.

(a) Wie lauten $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, das elektrische und das magentische Feld der Lichtwelle? Um was für eine Welle handelt es sich?

(b) Geben Sie die LAGRANGE–Funktion L an und stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das Teilchen auf.

(c) *Elektrische Dipolnäherung:* Vereinfachen Sie die Bewegungsgleichungen unter den Voraussetzungen $|\mathbf{r}| \ll \lambda$ und $|\dot{\mathbf{r}}| \ll c$.

Diese Voraussetzungen bringen die Tatsache zum Ausdruck, dass das elektromagnetische Feld des Lichtes in einem kleinen Raumgebiet (von der Ausdehnung eines atomaren Oszillators) als *homogen* betrachtet werden darf. Begründen Sie diese Aussage.

(d) Zeigen Sie durch Vergleich mit den Übungen zu Theoretische Physik I (Blatt 5, Aufg. 1), dass

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^\infty \mathrm{d}t'\; \mathrm{i}\chi(t')\,(-e)\mathbf{E}(\mathbf{0}, t - t') \tag{7}$$

die *eingeschwungene* Lösung der gemäß Aufg. 2c genäherten Bewegungsgleichungen ist. Sie ist durch das mit der Frequenz $\tilde{\omega}{=}2\pi c/\lambda$ oszillierende elektrische Feld am Ort des atomaren Oszillators und dessen Responsefunktion

$$\chi(t) := \frac{\mathrm{e}^{z_1 t} - \mathrm{e}^{z_2 t}}{\mathrm{i}m(z_1 - z_2)}\,, \qquad z_{1,2} := -\Gamma/2 \pm \sqrt{(\Gamma/2)^2 - \omega_0^2} \tag{8}$$

bestimmt.

3. *Oszillator-Modell eines Dielektrikums* 15 P

Das Ergebnis Gl.(7) ist Ausgangspunkt für eine modellhafte Beschreibung der *Materialeigenschaften*, die die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Materie bestimmen.

(a) Die *frequenzabhängige Permittivitätszahl* $\epsilon(\omega)$ eines Systems ist durch den Zusammenhang [2]

$$\mathbf{P}(\omega) = [\epsilon(\omega) - 1]\epsilon_0\mathbf{E}(\omega) \tag{9}$$

zwischen den FOURIER–Transformierten des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(t)$ und der *elektrischen Polariation* $\mathbf{P}(t)$ definiert.

Der geladene Oszillator aus Aufg. 2 repräsentiert ein atomares Dipolmoment, $\mathbf{p}(t)$=$(-e)\mathbf{r}(t)$. Gibt es n solcher Dipole in der Volumeneinheit eines Dielektrikums, dann ist die elektrische Polarisation (el. Dipoldichte) $\mathbf{P}(t)$= $-\,en\mathbf{r}(t)$. Leiten Sie daraus unter Benutzung von Gln.(7)–(9) den Ausdruck

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + \omega \mathrm{i}\Gamma}\ , \qquad \omega_\mathrm{p} := \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}} \tag{10}$$

für die frequenzabhängige Permittivitätszahl her. Darin ist ω_p als *Plasmafrequenz* bekannt.

Beachten Sie, dass Gl.(10) erlaubt, die Oszillatorfrequenz ω_0 des Modells durch die gut zugängliche Meßgröße *Permittivitätszahl* [3], $\epsilon_\mathrm{r} := \lim_{\omega\to 0}\epsilon(\omega)$, auszudrücken:

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\epsilon_\mathrm{r} - 1}\ . \tag{11}$$

(b) Die frequenzabhängige *Leitfähigkeit* $\sigma(\omega)$[4] eines Systems ist durch den Zusammenhang

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\omega) \tag{12}$$

zwischen den FOURIER–Transformierten des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(t)$ und der *Ladungsstromdichte* $\mathbf{j}(t)$ definiert.[5]

[2] Gelegentlich wird $\epsilon(\omega)$ als "komplexe Dielektrizitätskonstante" bezeichnet und durch $\mathbf{D}(\omega)$=$\epsilon(\omega)\epsilon_0\mathbf{E}(\omega)$ eingeführt, wobei $\mathbf{D} \equiv \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ die sog. "dielektrische Verschiebung" ist.

[3] Gelegentlich wird die Permittivitätszahl auch "(statische, relative) Dielektrizitätskonstante" genannt.

[4] Hierbei handelt es sich um den langwelligen Limes $\sigma(\omega) := \lim_{k\to 0}\sigma^{\|,\perp}(k,\omega)$ der verallgemeinerten longitudinalen bzw. transversalen Leitfähigkeit (siehe Gl.(17 unten). Gelegentlich wird $\sigma(\omega)$ auch als "Wechselstromleitfähigkeit" bezeichnet.

[5] Gleichung (12) ist eine Verallgemeinerung des OHMschen Gesetzes.

Die in Bewegung befindlichen, geladenen Teilchen aus Aufg. 2 repräsentieren auch eine *Ladungsstromdichte*, $\mathbf{j}(t) = -en\dot{\mathbf{r}}(t)$. Leiten Sie daraus unter Benutzung von Gln.(7)–(9) den Ausdruck

$$\sigma(\omega) = \frac{\mathrm{i}\epsilon_0\omega_\mathrm{p}^2}{\omega - \frac{1}{\omega}\,\omega_0^2 + \mathrm{i}\Gamma} \,, \tag{13}$$

für die frequenzabhängige Leitfähigkeit des Modells her, und verifizieren Sie im hier betrachteten Oszillator–Modell den allgemein gültigen Zusammenhang [6]

$$\epsilon(\omega) = 1 + \mathrm{i}\,\frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0\omega} \,. \tag{14}$$

(c) Überzeugen Sie sich von der sehr plausiblen Tatsache, dass die Gleichstrom–Leitfähigkeit $\sigma_0 := \lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega)$ verschwindet, wenn auf den Ladungsträger eine Rückstellkraft wirkt, die ihn an eine Ruhelage bindet ($\omega_0 > 0 \iff$ "Nichtleiter" mit $1 < \epsilon_\mathrm{r} < \infty$).

Gibt es dagegen *keine* Rückstellkraft ($\omega_0{=}0 \iff$ "Leiter" mit $\epsilon_\mathrm{r}{=}\infty$), dann geht Gl.(13) in die bekannte Drude–Leitfähigkeit eines metallischen Leiters [7] über:

$$\sigma(\omega)^{\mathrm{Drude}} = \frac{\sigma_0}{1 - \mathrm{i}\omega\tau} \tag{15}$$

mit $\sigma_0{=}ne^2\tau/m$. Wie hängt die Relaxationszeit τ des Leiters mit der Dämpfungskonstanten Γ des Modells zusammen?

4. *Komplexer Brechungsindex* Bonus 10 P

Für eine transversale ebene Lichtwelle, die sich in homogener, isotroper Materie ausbreitet, gilt

$$k = \frac{\omega}{c}\,n(\omega) \,, \qquad n(\omega) := \sqrt{\mu(\omega)\,\epsilon(\omega)} \tag{16}$$

mit dem komplexen, frequenzabhängigen *Brechungsindex* $n(\omega)$. Dabei bezeichnen $\mu(\omega)$ und $\epsilon(\omega)$ die frequenzabhängige Permeabilitäts– und Permittivitätszahl des Materials.

[6] Siehe z.B. [1, Kap. 3-4] oder [2, App. K].
[7] Siehe z. B. [2, Kap. 1].

Diskutieren und zeichnen Sie Real– und Imaginärteil des Brechungsindex als Funktion von ω für das Dielektrikum aus Aufg. 3 unter der Annahme $\mu(\omega)$=1, $\epsilon_{\mathrm{r}} - 1 = \omega_{\mathrm{p}}^2/\omega_0^2 \ll 1$.

Zur Herleitung von Gl.(16):
In homogener, isotroper Materie sind die FOURIER–Transformierten (bez. Raum und Zeit) der Ladungsstromdichte und des elektrischen Feldes durch

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega} = \overset{\leftrightarrow}{\sigma}_{\mathbf{k}\omega} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \sigma^{\|}(k,\omega)\mathbf{E}^{\|}_{\mathbf{k}\omega} + \sigma^{\perp}(k,\omega)\mathbf{E}^{\perp}_{\mathbf{k}\omega} \tag{17}$$

verknüpft, wobei das Feld in seine zum Wellenvektor $\mathbf{k}$ parallele und senkrechte Komponente zerlegt wurde, $\mathbf{E}=\mathbf{E}^{\|}_{\mathbf{k}\omega} + \mathbf{E}^{\perp}_{\mathbf{k}\omega}$. Der Leitfähigkeitstensor besitzt nur zwei unabhängige Elemente, $\sigma^{\|,\perp}(k,\omega)$, die verallgemeinerte (wellenzahl– und frequenzabhängige) longitudinale und transversale Leitfähigkeit.

Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$ (Überlagerung von ebenen Wellen) muss nun den MAXWELLschen Gleichungen genügen, was [8]

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} &= \rho_{\mathbf{k}\omega}/\epsilon_0\ , && (18)\\
\mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} &= \mathrm{i}\omega\mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega}\ , && (19)\\
\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega} &= 0\ , && (20)\\
c^2\mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega} &= \mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}/\epsilon_0 - \mathrm{i}\omega\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\ , && (21)
\end{aligned}$$

für die FOURIER–Koeffizienten der diversen Felder zur Folge hat. Aus Gl.(20) entnimmt man $\mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega} \equiv \mathbf{B}^{\perp}_{\mathbf{k}\omega}$. Nach Anwendung von $\mathbf{k}\times$ auf Gl.(19) und Multiplikation mit ω in Gl.(21) lässt sich die transversale Komponente $\mathbf{B}^{\perp}_{\mathbf{k}\omega}$ aus Gl.(21) eliminieren. Eine Zerlegung der Vektoren in Gl.(21) in longitudinale und transversale Komponenten liefert dann für das elektrische Feld in einem homogenen, isotropen Material

$$-\omega^2\mathbf{E}^{\|}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\mathrm{i}\omega}{\epsilon_0}\mathbf{j}^{\|}_{\mathbf{k}\omega} \implies \left[\omega^2 + \frac{\mathrm{i}\omega}{\epsilon_0}\sigma^{\|}(k,\omega)\right]\mathbf{E}^{\|}_{\mathbf{k}\omega} = 0\ , \tag{22}$$

$$(c^2k^2-\omega^2)\mathbf{E}^{\perp}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\mathrm{i}\omega}{\epsilon_0}\mathbf{j}^{\perp}_{\mathbf{k}\omega} \implies \left[\omega^2 - c^2k^2 + \frac{\mathrm{i}\omega}{\epsilon_0}\sigma^{\perp}(k,\omega)\right]\mathbf{E}^{\perp}_{\mathbf{k}\omega} = 0\ . \tag{23}$$

[8] Beachte Mnemotechnik beim FOURIER–Transformieren: $\vec{\nabla} \to \mathrm{i}\mathbf{k}$ und $\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega$.

Eine im Material fortschreitende, ebene elektromagnetische Welle mit von Null verschiedener Amplitude ($\mathbf{E}^{\parallel}_{\mathbf{k}\omega} \neq 0$ oder $\mathbf{E}^{\perp}_{\mathbf{k}\omega} \neq 0$ für $k, \omega \neq 0$) wird es demnach nur dann geben, wenn die eckige Klammer in der ersten oder der zweiten Gleichung verschwindet. Das führt mit der abkürzenden Bezeichnung

$$\epsilon^{\parallel,\perp}(k,\omega) := 1 + \mathrm{i}\frac{\sigma^{\parallel,\perp}(k,\omega)}{\epsilon_0 \omega} \tag{24}$$

auf die *longitudinale* und die *transversale Dispersionsgleichung*

$$\begin{aligned} \omega^2 \epsilon^{\parallel}(k,\omega) &= 0 \,, && (25) \\ c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon^{\perp}(k,\omega) &= 0 \,. && (26) \end{aligned}$$

Zunächst ist zu bemerken, dass im Vakuum ($\epsilon^{\parallel,\perp}(k,\omega) \equiv 1$) keine *longitudinalen* elektromagnetischen Wellen ($\omega \neq 0$) exisitieren, weil dort die Bedingung Gl.(25) *nicht* erfüllt ist. Ein zeitlich konstantes (ω=0) longitudinales elektrisches (oder magnetisches) Feld im Vakuum ist dagegen möglich. Für eine *transversale* elektromagnetische Welle im Vakuum muss ω=ck sein.

In Materie wird die Dispersion elektromagnetischer Wellen durch die Materialeigenschaften bestimmt, die sich im Verhalten der *verallgemeinerten dielektrischen Funktionen* $\epsilon^{\parallel,\perp}(k,\omega)$ im Detail niederschlagen.

Für Wellen genügend großer Wellenlänge λ=$2\pi/k$ (z. B. Licht) wird man sich auf die führenden Terme in einer Taylor–Entwicklung von $\epsilon^{\parallel,\perp}(k,\omega)$ um k=0 beschränken dürfen,[9]

$$\epsilon^{\parallel,\perp}(k,\omega) \approx \epsilon(\omega) + \epsilon_2^{\parallel,\perp}(\omega) k^2 \qquad \epsilon(\omega) := \lim_{k \to 0} \epsilon^{\parallel,\perp}(k,\omega) \,. \tag{27}$$

Für k=0 unterscheiden sich longitudinale und transversale dielektrische Funktion nicht. Setzt man Gl.(27) in die transversale Disperionsbedingung Gl.(26) ein, so folgt Gl.(16) mit

$$\mu(\omega) := \left[1 - \frac{\omega^2}{c^2}\, \epsilon_2^{\perp}(\omega) \right]^{-1} \,. \tag{28}$$

[9]Ein in k linearer Beitrag kann hier aus Symmetriegründen nicht auftreten.

Literatur

[1] David Pines. *Elementary Excitations in Solids.* W. A. Benjamin, Inc., New York, 1964.

[2] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin. *Solid State Physics.* Holt-Saunders International Editions, Tokyo, 1976.