Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 7, Abgabetermin: 05.12.05

1. *2–d Coulombpotential* 15 P

   Die Position eines Teilchens werde durch Zylinderkoordinaten (r, φ, z) beschrieben. Die potentielle Energie des Teilchens sei

   $$V(r) = V_0 \ln \frac{r}{r_0} \tag{1}$$

   wobei V_0 und r_0 Konstanten.

   (a) Wie lautet die LAGRANGE–Funktion?

   (b) Stellen Sie die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen auf.

   (c) Finden und interpretieren Sie mindestens 2 Erhaltungssätze.

   (d) Eine homogen geladene Gerade (z–Achse) mit der Linienladungsdichte[1] λ erzeugt das elektrostatische Potential (ϵ_0 elektrische Feldkonstante, r_0 Konstante (die den Potential-Nullpunkt festlegt))

   $$\phi(r, \varphi, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} \;, \tag{2}$$

   so dass Gl.(1) mit $V_0 = -\,\bar{q}\lambda/(2\pi\epsilon_0)$ die potentielle Energie einer Punktladung $\bar{q}$ im Feld der geladenen Geraden darstellt.
   Bestimmen Sie mit Hilfe der POISSON–Gleichung

   $$\Delta\phi(r, \varphi, z) = -\frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(r, \varphi, z) \tag{3}$$

   die Ladungsdichte ρ in Zylinderkoordinaten und überzeugen sich so, dass Gl.(2) tatsächlich das von der homogen geladenen z–Achse erzeugte Potential ist.[2]
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass in Zylinderkoordinaten (r, φ, z)

   $$\Delta \ln \frac{r}{r_0} = \delta(r) \tag{4}$$

   gilt, indem Sie die $\Delta \ln \sqrt{r^2 + o}$ für $o \to 0$ untersuchen.

[1] Dabei ist $\lambda := Q(L)/L$, wenn $Q(L)$ die Ladung bezeichnet, die auf einem Geradenabschnitt der Länge L sitzt.

[2] In kartesischen Koordinaten lässt sich ρ leicht angeben: $\rho(\mathbf{r}) = \lambda\delta(x)\delta(y)$.

2. *Verallgemeinertes Potential* 15 P

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Ebene unter dem Einfluss einer Kraft, die in Richtung auf ein Kraftzentrum wirkt. Für den Betrag K der Kraft gelte, wenn r der Abstand vom Kraftzentrum ist:

$$K = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right) . \tag{5}$$

Bestimmen Sie das verallgemeinerte Potential $U{=}U(r,\dot{r})$ und damit die Lagrange–Funktion L für die Bewegung in der Ebene.

3. *Trägheitsmoment einer zylindrischen Röhre* 5 P

Berechnen Sie das Trägheitsmoment $\Theta_{\mathbf{n}} := \mathbf{n}\cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot\mathbf{n}$ eines zylindrischen Rohrs homogener Massendichte ρ_0 bez. der Symmetrieachse (Innenradius R_i, AußenradiusR_a) . Darin bezeichnet

$$\overleftrightarrow{\Theta} := \int \mathrm{d}^3r\ \rho(\mathbf{r}) \left(|\mathbf{r}|^2 \overleftrightarrow{I} - \mathbf{r}\,\mathbf{r}\right) \tag{6}$$

den Trägheitstensor einer Massenverteilung, die durch die Dichte $\rho(\mathbf{r})$ beschrieben wird.