Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 6, Abgabetermin: 28.11.05

1. *Der* LENZ*sche Vektor* 15 P

   Eine Punktmasse (Masse μ) bewege sich in einem Zentralkraftfeld

   $$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu\alpha}{r^3}\,\mathbf{r} \tag{1}$$

   mit $r := |\mathbf{r}|$ und reeller Konstante $\alpha \neq 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass dann der LENZsche Vektor $\mathbf{C}$,

   $$\mathbf{C} := \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{\mu|\alpha|} - \mathrm{sign}(\alpha)\,\frac{\mathbf{r}}{r}\,, \tag{2}$$

   eine vektorielle *Konstante der Bewegung* darstellt. Dabei bezeichnet $\mathbf{L}$ den Teilchendrehimpuls bez. des Koordinatenursprungs.

   (b) Sei $\varphi{=}\varphi(t)$ der Winkel, den der Ortsvektor $\mathbf{r}{=}\mathbf{r}(t)$ und der LENZsche Vektor zur Zeit t einschließen, d.h. $\mathbf{r}\cdot\mathbf{C}{=}rC\cos\varphi$.

   Zeigen Sie, dass die Punktmasse eine Bahnkurve durchläuft, deren geometrische Form durch die Gleichung $r{=}r(\varphi)$ mit

   $$r(\varphi) = \frac{p}{\mathrm{sign}(\alpha) + \epsilon\cos\varphi}\,, \qquad p := \frac{1}{|\alpha|}\left(\frac{L}{\mu}\right)^2\,, \qquad \epsilon = C \tag{3}$$

   dargestellt wird.

   (c) Berechnen Sie den Betrag C des LENZschen Vektors und zeigen so, dass die *numerische Exzentrizität* ϵ der Bahn nicht nur vom Drehimpuls $L := |\mathbf{L}|$ sondern auch von der Gesamtenergie E der Punktmasse abhängt.

2. *Bahnkurven im* $1/r$*–Potential* 15 P

   Diskutieren Sie die Bahnkurven Gl.(3) für

   (a) eine *anziehende* Kraft und

   (b) eine *abstoßende* Kraft.

   Untersuchen Sie jeweils Fälle $\epsilon < 1$, $\epsilon{=}1$ und $\epsilon > 1$. Fertigen Sie eine Skizze mit charakteristischen Bahnen an und zeichnen Sie darin auch den LENZschen Vektor ein.