Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 5, Abgabetermin: 21.11.05

1. *Bewegung auf Schraubenlinie* 15 P

   Auf einer Schraubenlinie, die durch die Parameterdarstellung

   $$x = R\cos\phi\ , \quad y = R\sin\phi\ , \quad z = a\phi\ , \quad (-\infty \leq \phi \leq \infty) \tag{1}$$

   mit Konstanten $R > 0$, $a > 0$ dargestellt wird, gleite reibungsfrei eine Punktmasse m unter dem Einfluss eines homogenen Schwerefeldes, $\mathbf{K} = -mg\mathbf{e}_z$.

   (a) Bestimmen Sie die LAGRANGE–Funktion für das System.

   (b) Stellen Sie die LAGRANGE–Gleichung(en) 2. Art auf und finden Sie deren Lösung(en).

   (c) Berechnen Sie die z–Komponente des Teilchen–Drehimpulses bez. des Koordinaten Ursprungs O und zeigen Sie, dass

   $$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \text{const} < 0\ . \tag{2}$$

   Wie erklären Sie sich, dass der Drehimpuls hier *keine* Konstante der Bewegung ist?

2. *Pendel in rotierender Ebene* 16 P

   Ein zu einem Kreis mit Radius R gebogener Draht rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega\mathbf{e}_z$ um einen Durchmesser, der parallel zum homogenen Schwerefeld $-g\mathbf{e}_z$ ist. Auf dem Draht gleite reibungsfrei eine Perle der Masse m.

   (a) Gesucht sind die *Gleichgewichtslagen* der Perle.[1]

   Hinweis: Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass der Kreismittelpunkt im Ursprung liegt. Die Lage der Perle auf dem Kreis werde durch den Polarwinkel $\vartheta = \vartheta(t)$ beschrieben. Bestimmen Sie die LAGRANGE–Funktion für das System, und stellen Sie die Bewegungsgleichung (LAGRANGE–Gleichung 2. Art) auf.

[1] Eine Gleichgewichtslage der Perle ist durch das Verschwinden ihrer Bahnbeschleunigung und –geschwindigkeit definiert.

(b) Um festzustellen, ob eine Gleichgewichtslage ϑ_{G} *stabil* oder *instabil* ist, wird das zeitliche Verhalten einer kleinen Abweichung $\epsilon(t)$ von der Gleichgewichtslage untersucht. Bleibt $\epsilon(t)$ für alle Zeiten klein, dann ist die Gleichgewichtslage *stabil*, wächst $\epsilon(t)$ dagegen mit der Zeit unbeschränkt an, dann handelt es sich um eine *instabile* Gleichgewichtslage.

Machen Sie zu jeder der in Aufg. 2a gefundenen Gleichgewichtslagen eine *Stabilitätsanalyse*, indem Sie jeweils —unter der Annahme $|\epsilon| \ll |\vartheta_{\mathrm{G}}|$— eine *linearisierte Bewegungsgleichung* für

$$\epsilon(t) := \vartheta(t) - \vartheta_{\mathrm{G}}$$

herleiten und deren Lösung für (ebenfalls kleine) Anfangsbedingungen ϵ_0, $\dot{\epsilon}_0$ diskutieren.

3. *Standuhr* Bonus 6 P

Ein Uhrmacher hat eine Standuhr mit einem modernen "Flachpendel"–Uhrwerk gebaut. Das flache Pendel der Uhr kommt dem Ideal eines mathematischen ebenen Pendels, das reibungsfrei kleine Schwingungen um seine Ruhelage ausführt, sehr nahe. Die raffinierte Konstruktion mit fein justierbarer Pendellänge sorgt —wie der Meister in langen Testreihen in seiner Werkstatt herausgefunden hat— bei einer Pendellänge von l=2 m für exakten Gang.

Das Prachtstück wird nun durch Drehung der Zeiger genau gestellt (Vergleich mit der Funkuhr des Uhrmachers) und als Blickfang im Schaufenster eines Uhrengeschäfts auf einem Drehteller päsentiert, der zwei Umdrehungen pro Minute macht, damit der eilige Passant auch die handwerklich aufwändig gestaltete Rückseite der Standuhr bewundern kann.

Am nächsten Tag meldet sich der erboste Verkaufsleiter und beschwert sich, dass die Uhr nachgehe! Der gewitzte Meister verspricht sofortige Abhilfe noch am gleichen Tag. Danach zeigt die Uhr auf dem Drehteller im Schaufenster die exakte Zeit über viele Tage . . . , bis sie eines Tages verkauft wird, und am darauf folgenden Tag der erboste Kunde sich beim Verkaufsleiter beschwert, dass die teure Standuhr Uhr vorgehe!

Wie hatte der Meister den Gang der Uhr im Geschäft korrigiert? Welchen Hinweis zur Selbsthilfe kann er dem Kunden in einer telefonischen Beratung geben?