Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 4, Abgabetermin: 14.11.05

1. *Teilchen im Kraftfeld* 12 P

   (a) Zeigen Sie, dass Kraftfelder der Form

      i. $\mathbf{K}(\mathbf{r})=\mathbf{K}_0=\text{const}$

      ii. $\mathbf{K}(\mathbf{r})=f(r)\mathbf{r}$

   mit $r := |\mathbf{r}|$ und stetig differenzierbarer Funktion f *konservativ* sind. Wie lautet in beiden Fällen die zugehörige potentielle Energie? Zeigen Sie, dass hier die Gesamtenergie $E=T+V$ *Konstante der Bewegung* ist.

   (b) Zeigen Sie, dass bei der Bewegung eines Teilchens in einem *Zentralkraftfeld*,

   $$\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = f(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\ , \tag{1}$$

   der Drehimpuls $\mathbf{L}$ bez. des Ursprungs eine *Konstante der Bewegung* ist, $\mathbf{L}=\mathbf{L}_0=\text{const}$.

   (c) Zeigen Sie, dass die Bewegung eines Teilchens im Zentralkraftfeld Gl.(1) ganz in einer *Ebene* verläuft, die das Kraftzentrum (Ursprung) enthält und durch Anfangsort und –geschwindigkeit festgelegt ist.

   (d) Zeigen Sie, dass bei ebener Bewegung die vom "Fahrstrahl"[1] im Zeitintervall (t_1, t_2) überstrichene Fäche durch

   $$A = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{r}(t_1)}^{\mathbf{r}(t_2)} |\,\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{r}| \tag{2}$$

   bestimmt ist.

   Werten Sie die überstrichene Fläche für die Bewegung im Zentralkraftfeld Gl.(1) aus und begründen so $A \propto (t_2 - t_1)$, den sog. "Flächensatz": der Fahrstrahl überstreicht in Zeitintervallen gleicher Länge gleiche Flächeninhalte.

[1] Als *Fahrstrahl* bezeichnet man die *gerade* Verbindungslinie zwischen dem in der Ebene liegenden Koordinatenursprung und dem Teilchen.

Welchen Wert hat hierbei die Proportionalitätskonstante $\dot{A}$=const, die sog. "Flächengeschwindigkeit des Fahrstrahls"?

2. *Schiefsymmetrischer Tensor* 8 P

   Zeigen Sie, dass sich jedem *schiefsymmetrischen* Tensor[2] $\overleftrightarrow{S} \;\widehat{=}\, (S_{\alpha\beta})$ in eindeutiger Weise ein Vektor $\mathbf{s} \,\widehat{=}\, (s_1, s_2, s_3)$ zuordnen lässt, so dass für jedes $\mathbf{r} \,\widehat{=}\, (x, y, z)$ die Vektoridentität

$$\overleftrightarrow{S} \cdot \mathbf{r} \equiv \mathbf{s} \times \mathbf{r} \tag{3}$$

   gilt. Drücken Sie die Koordinaten s_1, s_2 und s_3 explizit durch Matrixelemente $S_{\alpha\beta}$ aus.

   Verifizieren Sie, dass sich kompakt (Summationsabkommen!) zusammenfassen lässt: $s_\alpha = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\beta\gamma}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.

3. *Rotierendes Bezugssystem* 10 P

   Gegeben sei ein Dreibein $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)\}$ von zeitabhängigen Basisvektoren, für das Orthogonalitäts– und Vollständigkeitsrelationen

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\ , \qquad \overleftrightarrow{I} = \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{e}_\alpha\ \mathbf{e}_\alpha \tag{4}$$

   in jedem Zeitpunkt zutreffen.[3] Zeigen Sie,

   (a) dass die mit Hilfe der Basisvektoren gebildete Dyade

$$\overleftrightarrow{\Omega} := \sum_{\alpha=1}^{3}\ \dot{\mathbf{e}}_\alpha\, \mathbf{e}_\alpha\ , \qquad (\dot{\mathbf{e}}_\alpha := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathbf{e}_\alpha) \tag{5}$$

   ein *schiefsymmetrischer* Tensor ist.

   Hinweis: Betrachten Sie die Zeitableitung der Vollständigkeitsrelation.

---

[2]Ein schiefsymmetrischer Tensor ist durch $\overleftrightarrow{S}^{\mathrm{T}} = -\overleftrightarrow{S}$ charakterisiert.

[3]Das Dreibein kann z. B. ein mit einem starren Körper fest verbundenes Koordinatensystem repräsentieren. Dabei sei der Körper in einem Punkt O, der gleichzeitig den Ursprung des Bezugssystem bildet, fixiert. Damit ist die Bewegung des Körpers (bzw. des Dreibeins) auf Drehungen um eine Achse $\mathbf{n}$ durch den Ursprung O beschränkt, wobei die Richtung der Drehachse mit der Zeit variieren kann, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$.

(b) dass $\overleftrightarrow{\Omega}$ einen Basisvektor $\mathbf{e}_\beta(t)$ in seine Zeitableitung transformiert:

$$\dot{\mathbf{e}}_\beta = \overleftrightarrow{\Omega} \cdot \mathbf{e}_\beta \;\equiv\; \overleftarrow{\omega} \times \mathbf{e}_\beta \qquad (\beta{=}1,2,3)\ . \tag{6}$$

Der Vektor $\overleftarrow{\omega} = \overleftarrow{\omega}(t)$ (vergl. Aufg.2) bezeichnet die *Winkelgeschwindigkeit* des rotierenden Dreibeins.

(c) Verifizieren Sie für Betrag ω und Richtungsvektor $\mathbf{n}$ der *Winkelgeschwindigkeit* eines vorgegebenen Dreibeins $\{\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)\}$

$$\begin{aligned} \omega &:= |\overleftarrow{\omega}| = \sqrt{(\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2}\ , \qquad (7)\\ \mathbf{n} &:= \frac{\overleftarrow{\omega}}{\omega} = \frac{\mathbf{e}_1(\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_2(\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_3(\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2)}{\sqrt{(\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2}}\ . \end{aligned}$$

(d) In vielen Anwendungen sind nicht die zeitabhängigen Basisvektoren sondern die Winkelgeschwindigkeit der Drehung vorgegeben. Dann müssen die Basisvektoren ggf. erst durch Lösung der Differentialgleichungen Gl.(6) bestimmt werden.

Verifizieren Sie, dass die Lösung von Gl.(6) für den Spezialfall einer *konstanten* Winkelgeschwindigkeit,

$$\overleftarrow{\omega} = \omega\mathbf{n} = \text{const.}\ , \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\beta(t) &= \mathbf{n}\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\beta(0) + \cos(\omega t)[\mathbf{e}_\beta(0) - \mathbf{n}\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\beta(0)] \\ &\qquad + \sin(\omega t)(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\beta(0)) \\ &= \overleftrightarrow{D}_{\mathbf{n}}(\omega t) \cdot \mathbf{e}_\beta(0) \qquad (9) \end{aligned}$$

lautet (vergl. Übungsblatt 1, Aufg. 1).

4. *Geladenes Teilchen im Magnetfeld* Bonus 6 P

Auf ein Teilchen mit Ruhemasse m_0 und Ladung q wirkt in einem Magnetfeld bekanntlich die Lorentzkraft $\mathbf{K}{=}q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

(a) Zeigen Sie, dass sich der Betrag des Teilchenimpulses im Magnetfeld zeitlich nicht verändert: $|\mathbf{p}(t)|{=}\text{const.}$

(b) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Teilchens in einem (räumlich und zeitlich) *konstanten* Magnetfeld $\mathbf{B}_0$ durch

$$\mathbf{v}(t) = \overleftrightarrow{D}_{\mathbf{n}}(\omega t) \cdot \mathbf{v}(0) \tag{10}$$

gegeben ist, wobei $\omega = qB_0/m$ die *Zyklotronfrequenz* (mit *relativistischer* Masse m) und $\mathbf{n} = -\mathbf{B}_0/B_0$ einen Einheitsvektor (dem Feld entgegengerichtet) bezeichnen.

(c) Diskutieren Sie die Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathrm{d}t' \; \mathbf{v}(t') \tag{11}$$

des Teilchens aus Aufg. 4b für den Fall, dass die Anfangsgeschwindigkeit einen Winkel ϑ mit dem Magnetfeld einschließt. Wählen Sie dazu ein kartesisches Koordinatensystem so, dass sein Ursprung im Anfangsort $\mathbf{r}(0)$ liegt, die z–Achse in $\mathbf{B}$–Feldrichtung zeigt und die Anfangsgeschwindigkeit (Betrag $|\mathbf{v}(0)| = v_0$) in der Ebene $x=0$ mit $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{v}(0) > 0$ zu liegen kommt. Betrachten Sie insbesondere die Spezialfälle $\vartheta = 0$ und $\pi/2$.