Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 3, Abgabetermin: 07.11.05

1. *Kugelsymmetrisches Feld* *6 P*

   Betrachten Sie eine vom Raumpunkt $\mathbf{r}=x\ \mathbf{e}_1 + y\ \mathbf{e}_2 + z\ \mathbf{e}_3 \mathrel{\widehat{=}} (x,y,z)$ abhängige Funktion der Form $f(r)$ (beliebig oft stetig differenzierbar), wobei $r := |\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

   (a) Zeigen Sie, dass das Feld *invariant* gegenüber Drehungen des Koordinatensystems ist. Welche Gestalt haben die "Flächen konstanten Funktionswerts"?

   (b) Drücken Sie die partiellen Ableitungen

   $$\frac{\partial}{\partial x} f(r)\ ; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(r)\ ; \quad \Delta f(r)\ , \tag{1}$$

   durch die Ableitungen $f'(r)$ und $f''(r)$ aus. $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ bezeichnet den "LAPLACEoperator".

   (c) Wie lauten Betrag und Einheitsvektor des Gradientenfeldes $\vec{\nabla} f(r)$?

2. *Dreidimensionale* DIRAC*sche* δ*–Funktion* *6 P*

   Berechnen Sie $\Delta f(r)$ aus Aufg. 1b für den Spezialfall $f_a(r)=1/\sqrt{r^2+a^2}$, und diskutieren Sie das Verhalten der Funktion $(a>0)$

   $$\delta_a(\mathbf{r}) := -\frac{1}{4\pi} \Delta f_a(r)\ . \tag{2}$$

   Skizzieren Sie δ_a über r für a=2, 1 und 0.5. Zeigen Sie insbesondere, dass einerseits

   $$\int \mathrm{d}^3 r\ \delta_a(\mathbf{r}) = 1 \tag{3}$$

   und andererseits für jedes $r>0$ (d.h. $\mathbf{r} \neq 0$)

   $$\lim_{a\to 0} \delta_a(\mathbf{r}) = 0 \tag{4}$$

   gilt.

   Bemerkung: Die Funktion $\delta_a(\mathbf{r})$ ist demnach eine "Darstellung" der dreidimensionalen DIRACschen δ–Funktion, $\delta(\mathbf{r}) := \delta(x)\delta(y)\delta(z)$, und man erhält mit Gl.(2) für $a \to 0$ die Beziehung

$$\Delta\,\frac{1}{r} = -4\pi\;\delta(\mathbf{r})\;. \tag{5}$$

3. *Lokale Massenerhaltung* (10 P)
Betrachten Sie ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas), das den ganzen Raum ausfüllen möge. Dann ist die Masse in einem beliebig herausgegriffenen Teilgebiet V des Raumes

$$M_V := \int_V \mathrm{d}^3r\;\rho\;, \tag{6}$$

wenn $\rho{=}\rho(\mathbf{r},t)$ die *Massendichte* $[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$ bezeichnet. Und der *Massenstrom* $[\mathrm{kg\,s^{-1}}]$ durch eine Fläche S im Raum ist

$$I_S := \int_S \mathrm{d}\mathbf{F}\cdot\mathbf{j}\;, \tag{7}$$

wenn $\mathbf{j}{=}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ die *Massenstromdichte* $[\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}]$ bezeichnet.

(a) Erläutern Sie, warum sich *Massenerhaltung* durch die Gleichsetzung

$$M_V(t) = M_V(t+\mathrm{d}t) + I_{O_V}(t)\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

ausdrücken lässt, wobei O_V die Oberfläche des Volumens V und $\mathrm{d}t$ eine infinitesimale Zeitspanne bezeichnen.[1]

(b) Zeigen Sie, dass Gl.(8) zur *Kontinuitätsgleichung*,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\mathbf{j} = 0\;, \tag{9}$$

äquivalent ist.
Hinweis:
Benutzen Sie den GAUSSschen Integralsatz und die Tatsache, dass es sich bei dem Volumen V um ein zeitlich konstantes, beliebig wählbares Raumgebiet handelt.

[1] Da man für das Volumen V speziell eine infinitesimal kleine Umgebung $\mathrm{d}V$ irgendeines Raumpunktes $\mathbf{r}$ gewählt haben könnte, bringt Gl.(8) auch die *lokale* Erhaltung der Masse zum Ausdruck.

(c) Für ein System von Punktmassen m_i (i=1, …, N), die sich auf Bahnkurven $\mathbf{r}_i(t)$ bewegen, lässt sich die Massendichte ρ und die Massenstromdichte $\mathbf{j}$ am Ort $\mathbf{r}$ zur Zeit t in der Form

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r},t) &= \sum_{i=1}^{N} m_i\, \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)\right) \ , \\ \mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{v}_i(t)\, \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)\right) \end{aligned} \tag{10}$$

anschreiben, wobei $\mathbf{v}_i$ die Geschwindigkeit der i–ten Punktmasse bezeichnet. Prüfen Sie, ob die gegebenen Ausdrücke für Massen– und Massenstromdichte die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

(d) Ein Gas sei in einer Dose eingesperrt. Dichte und Stromdichte im Innern der Dose werden durch Gl.(10) beschrieben. Die Gasmoleküle mögen beim Aufprall auf die Dosenwand spiegelnd reflektiert werden. Zeigen Sie von der Kontinuitätsgleichung ausgehend, dass die gesamte in der Dose befindliche Gasmasse zeitlich konstant ist.

4. POISSON–*Gleichung* (6 P)

(a) N Punktmassen m_i seien an Orten $\mathbf{r}_i$ (i=1, …, N) platziert. Das von den Punktmassen am Ort $\mathbf{r}$ erzeugte Gravitationspotential ist

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} (-G) \frac{m_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \ . \tag{11}$$

Begründen Sie das mit Hilfe des Potentials einer einzelnen Punktmasse (vergl. Übungsblatt 2) und dem “Superpositionsprinzip der Kräfte”.

(b) Zeigen Sie, dass Gl.(11) auch in der Form

$$\phi(\mathbf{r}) = -G \int \mathrm{d}^3 r' \ \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{12}$$

geschrieben werden kann, wobei die Massendichte ρ gemäß Gl.(10) eingeführt wurde.

(c) Verifizieren Sie, dass das Gravitationspotential einer durch eine Dichte ρ charakterisierten Massenverteilung der Gleichung

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\,\rho(\mathbf{r}) \tag{13}$$

genügt, die als Poisson–Gleichung bekannt ist.

5. *Kontinuierliche Massenverteilung* (Bonus 6 P)
   Berechnen Sie das Gravitationspotential für den Fall (a, $M > 0$)

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{3M}{4\pi a^3}\begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad |\mathbf{r}| \leq a \\ 0 & \text{wenn} \quad |\mathbf{r}| > a \end{cases} \quad . \tag{14}$$

   Welche physikalische Anordnung wird damit beschrieben? Geben Sie $\phi(\mathbf{r})$ sowohl für $|\mathbf{r}| > a$ als auch für $|\mathbf{r}| \leq a$ an.