# Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 2, Abgabetermin: 31.10.05

## Klausurtermin: Fr 03.02.06 10:15h- 11:45h

1. *Bildliche Darstellung skalarer Felder* (10 P)

   (a) Das skalare Feld

   $$\phi(\mathbf{r})=\phi_0 - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \tag{1}$$

   beschreibe das *elektrostatische Potential*, das im Raumgebiet zwischen den Ebenen $x=0$ und $x=d$ herrscht. Das Potential in den Ebenen sei $\phi(\mathbf{r})|_{x=0}=\phi_0$ und $\phi(\mathbf{r})|_{x=d}=\phi_0+U$. Dabei sind $\phi_0 > 0$, $\mathbf{E}_0$, $d > 0$ und $U > 0$ unabhängig vom Ort $\mathbf{r}$.

   i. Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{E}_0$ explizit, ausgedrückt durch $U$ und $d$
   ii. Skizzieren Sie die *Äquipotentialflächen* $\phi(\mathbf{r})=\phi_0 + nU/4$ für $n=1, 2, 3$.
   iii. Welches *elektrostatische Feld* $\mathbf{E}(\mathbf{r}) := -\vec{\nabla}\phi(\mathbf{r})$ herrscht zwischen den beiden Ebenen?
   iv. Welche physikalische Anordnung wurde in dieser Aufgabe beschrieben?

   (b) Eine Punktmasse $M$ im Ursprung des Koordinatensystems erzeugt am Ort $\mathbf{r}$ das Gravitationspotential

   $$\phi(\mathbf{r}) = -G\,\frac{M}{r}\,, \qquad (r := |\mathbf{r}|) \tag{2}$$

   wobei $G \approx 6.673 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2kg^{-2}}$ die Gravitationskonstante ist.

   i. Wie lautet das Gravitationspotential $\phi'(\mathbf{r}')$ im gedrehten Koordinatensystem $K'$ (Drehung um einen Winkel $\varphi$ um die Achse $\mathbf{n}$)?
   ii. Skizzieren Sie das Gravitationspotential als Funktion des Abstands von der Punktmasse und diskutieren Sie die *Äquipotentialflächen* $\phi(\mathbf{r})$=const.
   iii. Bestimmen Sie das *Gravitationsfeld* $\mathbf{g}(\mathbf{r}) := -\vec{\nabla}\phi(\mathbf{r})$ der Punktmasse $M$.

iv. Auf eine Probemasse $m$ am Ort $\mathbf{r}$ wirkt in diesem Feld die Gravitationskraft $\mathbf{K}_{\rm grav}(\mathbf{r})$=$m\mathbf{g}(\mathbf{r})$. Geben Sie Betrag und Richtung der Kraft an.

v. Trägt die Punktmasse $M$ zusätzlich die elektrische Ladung $Q$, dann erzeugt diese ein elektrostatisches Potential ("COULOMB–Potential")[1]

$$\tilde{\phi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{3}$$

mit [2] $(4\pi\epsilon_0)^{-1} \approx 8.988 \times 10^9\,\mathrm{NC^{-2}m^2}$ und damit ein elektrostatisches Feld $\mathbf{E}$= $-\vec{\nabla}\tilde{\phi}(\mathbf{r})$. Auf eine mit der Probeladung $q$ behaftete Probemasse $m$ wirkt demnach am Ort $\mathbf{r}$ insgesamt die Kraft

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{r}) &:= m\mathbf{g}(\mathbf{r}) + q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1+\eta)\,\frac{\mathbf{r}}{r}\ , \qquad \eta := -4\pi\epsilon_0 G\,\frac{mM}{qQ}\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Verifizieren Sie Gl.(4). Begründen Sie durch Auswertung von $\eta$, warum beim "Wasserstoff–Problem" (Elektron im Kraftfeld eines Protons) nur die COULOMB–Anziehungskraft berücksichtigt wird.

2. *Elektrisches Feld einer Lichtwelle* (15 P)
Das elektrische Feld einer Lichtwelle (Wellenlänge $\lambda$, Phasengeschwindigkeit $c$) werde —vom Koordinatensystem $K$ aus betrachtet— durch das Vektorfeld

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E_0}\cos\left[2\pi(z+ct)/\lambda\right]\ , \qquad \mathbf{E_0} \,\widehat{=}\, \begin{bmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

mit konstantem Amplitudenvektor vom Betrage $E_0$ beschrieben.

---

[1] Es ist bemerkenswert, dass das COULOMB– und das Gravitationspotential dieselbe Ortsabhängigkeit $\sim 1/r$ aufweisen.

[2] Die COULOMB–Kraftkonstante hat den exakten Wert $(4\pi\epsilon_0)^{-1} = 10^{-7}c^2\,\mathrm{N\,C^{-1}s^2}$, wobei $c$=299792458 $\mathrm{ms^{-1}}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet. Die Gravitationskonstante $G$ dagegen muss experimentell bestimmt werden. Sie ist, wegen der Schwierigkeit der Messung, nur auf 4 geltende Ziffern bekannt.

(a) Um was für eine Welle handelt es sich in Gl.(5)? Welche Form haben die "Flächen konstanter Phase", d. h. die Flächen, auf denen das Vektorfeld einen vorgegebenen konstanten Wert annimmt? Hat die Welle eine wohl definierte Ausbreitungsrichtung? Wenn ja, welche? Ist das durch Gl.(5) beschriebene Licht polarisiert? Wenn ja, wie?

(b) Das Koordinatensystem $K'$ gehe aus $K$ durch Drehung um die $y$–Achse um den Winkel $(-\Theta)$ hervor. Geben Sie die Drehmatrix $\overleftrightarrow{D}_{\mathbf{e}_y}(\Theta)$ explizit an (vergl. Blatt1, Aufgabe 2).

(c) Zeigen Sie, dass —vom Koordinatensystem $K'$ aus betrachtet— das Vektorfeld aus Gl.(5) die Form

$$\mathbf{E}'(x', y', z', t) = \mathbf{E_0'} \cos(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega t) \ , \qquad \mathbf{r}' \mathrel{\widehat{=}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{6}$$

annimmt. Bestimmen Sie $\mathbf{E_0'}$, $\mathbf{k}'$ und $\omega$ in Abhängigkeit vom Drehwinkel $\Theta$ und den Parametern $\lambda$ und $c$.

Prüfen Sie, ob Ihre Rechnung $\mathbf{E_0'} \perp \mathbf{k}'$ ergibt. Welchen Schluss würden Sie ziehen, wenn sich beide Vektoren als *nicht* orthogonal zueinander heraus stellten? Begründen Sie Ihre Schlussfolgerung.

3. *Flächenintegrale* (20 P)

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\vec{\nabla} f(|\mathbf{r}|)$ mit

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \qquad f(r) \;:=\; \frac{1}{2} r^2 + \text{const} \ , \\ &\text{(ii)} \qquad f(r) \;:=\; \frac{1}{r} \ . \end{aligned}$$

durch die Fläche $S$.

(a) $S$ sei durch die Parameterdarstellung $\mathbf{R}(\xi, \eta) \mathrel{\widehat{=}} (\xi, \eta, \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2})$ mit $a > 0$, $-a \le \xi \le a$ und $-\sqrt{a^2 - \xi^2} \le \eta \le \sqrt{a^2 - \xi^2}$ definiert.

(b) $S$ sei die *geschlossene* Oberfläche einer Halbkugel vom Radius $a > 0$ mit den Teilflächen $z=0$, $x^2+y^2 < a^2$ und $z \ge 0$, $x^2+y^2+z^2=a^2$.

(c) Im Falle der *geschlossenen* Oberfläche ist das Flussintegral einmal direkt und einmal durch Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes zu berechnen.

(d) Wie verhalten sich die in Teil (a) und Teil (b) bzw. (c) der Aufgabe berechneten Vektorflüsse zueinander? Begründen Sie das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis.