

Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 11, Abgabetermin: 23.01.06

1. Die Γ -Funktion 10 P

Die durch das bestimmte Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} \quad (1)$$

definierte Funktion von z heißt EULERSche Γ -Funktion.

(a) Berechnen Sie $\Gamma(n + 1/2)$ für $n=0, 1$, und 2 .

(b) Verifizieren Sie ($\nu \geq 0$ ganz)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp p^n e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2\nu + 1 \\ (2p_{\text{th}}^2)^{\nu + \frac{1}{2}} \Gamma(\nu + \frac{1}{2}) & \text{für } n = 2\nu \end{cases}, \quad (2)$$

wobei $\beta=1/(k_B T)$ und $p_{\text{th}} := \sqrt{mk_B T}$ (*thermischer Impuls*).

2. MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung 15 P

(a) Berechnen Sie die *thermische* Impuls-Verteilung ¹

$$w(\mathbf{p}) = \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \right\rangle \quad (4)$$

für ein klassisches N -Teilchen-System mit HAMILTON-Funktion

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (5)$$

¹Das System befinde sich im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur $T=1/(k_B \beta)$. Der thermische Mittelwert einer Observablen $A=A(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ ist definiert durch

$$\langle A \rangle = \int d^3 p_1 \dots \int d^3 r_N A(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \frac{e^{-\beta H(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N)}}{\int d^3 \bar{p}_1 \dots \int d^3 \bar{r}_N e^{-\beta H(\bar{\mathbf{p}}_1, \dots, \bar{\mathbf{r}}_N)}}. \quad (3)$$

- (b) Leiten Sie aus $w(\mathbf{p})$ den Bruchteil $dN(v)/N$ der Teilchen her, deren Geschwindigkeitsbetrag einen Wert zwischen v und $v + dv$ aufweist. Verifizieren Sie die MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{dN(v)}{N} = \sqrt{\frac{2m^3}{\pi(k_B T)^3}} \exp\left(-\frac{m v^2}{2k_B T}\right) v^2 dv, \quad (6)$$

und zeichnen Sie $\frac{v_{\text{th}}}{N} \frac{dN(v)}{dv}$ als Funktion von v/v_{th} ($v_{\text{th}} = p_{\text{th}}/m$).

3. *Thermische Mittelwerte* 15 P

Berechnen Sie für das System aus Aufgabe 2 die thermischen Mittelwerte:

- (a) Gesamtimpuls $\mathbf{P} = \left\langle \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right\rangle$ mit Hilfe von $w(\mathbf{p})$,
- (b) Kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \right\rangle$ mit Hilfe von $w(\mathbf{p})$
- (c) Impuls und Impulsquadrat des j -ten Teilchens, $\langle \mathbf{p}_j \rangle$ und $\langle \mathbf{p}_j^2 \rangle$.