Übungen zur Theoretischen Physik II: Mechanik

Prof. J. Bosse, FU Berlin

WiSe 2005/06

Blatt 10, Abgabetermin: 16.01.06

1. *Vielteilchensystem* 15 P

Die Hamiltonfunktion $H{=}H(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)$ eines konservativen Systems von N Teilchen der Masse m_i ($i{=}1,\ldots,N$) hat die Form

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i}+V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N)\ . \tag{1}$$

Die potentielle Energie V des Systems beschreibe die Wechselwirkung zwischen Teilchenpaaren,[1]

$$V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}v(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|)\equiv\frac{1}{2}{\sum_{i,j}}'v(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|)\ . \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass eine dynamische Variable (Observable)

$$A=A(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) \tag{3}$$

des Systems[2] der Bewegungsgleichung

$$\dot{A}=\mathrm{i}\mathcal{L}A \tag{4}$$

genügt, wobei der Liouville–Operator $\mathcal{L}$ des Systems durch [3]

$$\mathcal{L}B:=\mathrm{i}\,\{H,B\} \tag{5}$$

definiert ist, d.h. durch seine Wirkung auf eine beliebige Observable B.

(b) Verifizieren Sie die explizite Form des Liouville–Operators,

$$\mathcal{L}=-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{v}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_i}+\mathbf{K}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}_i}\right) \tag{6}$$

[1] Eine *externe* konservative Kraft würde einen zusätzlichen Beitrag zur potentiellen Energie V von der Form $\sum_{i=1}^{N}u(\mathbf{r}_i)$ ergeben.

[2] A habe keine explizite Zeitabhängigkeit.

[3] $\{f,g\}$ Poisson–Klammer von f mit g.

mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i$ des i–ten Teilchens und der Kraft

$$\mathbf{K}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = -\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N} v'(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \tag{7}$$

auf das i–te Teilchen.

(c) Begründen Sie, warum der LIOUVILLE–Operator $\mathcal{L}$ eines konservativen Systems unabhängig von der Zeit t ist, und deshalb

$$\begin{aligned} A(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathcal{L}t} A(0) && (8)\\ &\equiv A(0) - \{H, A(0)\}\, t + \frac{1}{2}\{H, \{H, A(0)\}\}\, t^2 + \ldots && (9) \end{aligned}$$

die formale Lösung von Gl.(4) darstellt.[4]

2. *Massen– und Impulserhaltung* 15 P

Beispiele für Observable sind die *Massendichte* $M(\mathbf{r})$ und die *Impulsdichte* $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ am Ort $\mathbf{r}$,

$$M(\mathbf{r}) := \sum_{i=1}^{N} m_i\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\ , \qquad \mathbf{G}(\mathbf{r}) := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\ . \tag{11}$$

(a) Berechnen Sie die Zeitableitung $\dot{M}(\mathbf{r})$ mit Hilfe von Gln.(4),(6), und verifizieren Sie so die *Kontinuitätsgleichung*

$$\dot{M}(\mathbf{r}) + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}) = 0 \tag{12}$$

für die Observable *Massendichte*. Aus Gl.(12) wird die alternative Bezeichnung *Massenstromdichte* für die *Impulsdichte* $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ verständlich.

(b) Leiten Sie in ähnlicher Weise auch für den Vektor der Impulsdichte $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ eine *Kontinuitätsgleichung* her,

$$\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\Pi}(\mathbf{r}) = 0\ . \tag{13}$$

Wie lautet der Tensor der *Impulsstromdichte* $\overleftrightarrow{\Pi}(\mathbf{r})$ (Spannungstensor)?

---

[4] Die Exponentialfunktion eines Operators $\mathcal{O}$ ist eine kompakte Schreibweise für die Summe

$$\mathrm{e}^{\mathcal{O}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \mathcal{O}^n\ . \tag{10}$$